

## Konkrete algebraiske strukturer 1-3

Madsen, Anders J. Hede

*Publication date:*  
2006

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

*Citation for published version (APA):*  
Madsen, A. J. H. (2006). *Konkrete algebraiske strukturer 1-3*. Roskilde Universitet. IMFUFA-tekst : i, om og med matematik og fysik Nr. 454 <http://milne.ruc.dk/lmfufaTekster/>

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain.
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact [rucforsk@kb.dk](mailto:rucforsk@kb.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

# IMFUFA **tekst**

- I, OM OG MED MATEMATIK OG FYSIK

## **Konkrete algebraiske strukturer 1-3**

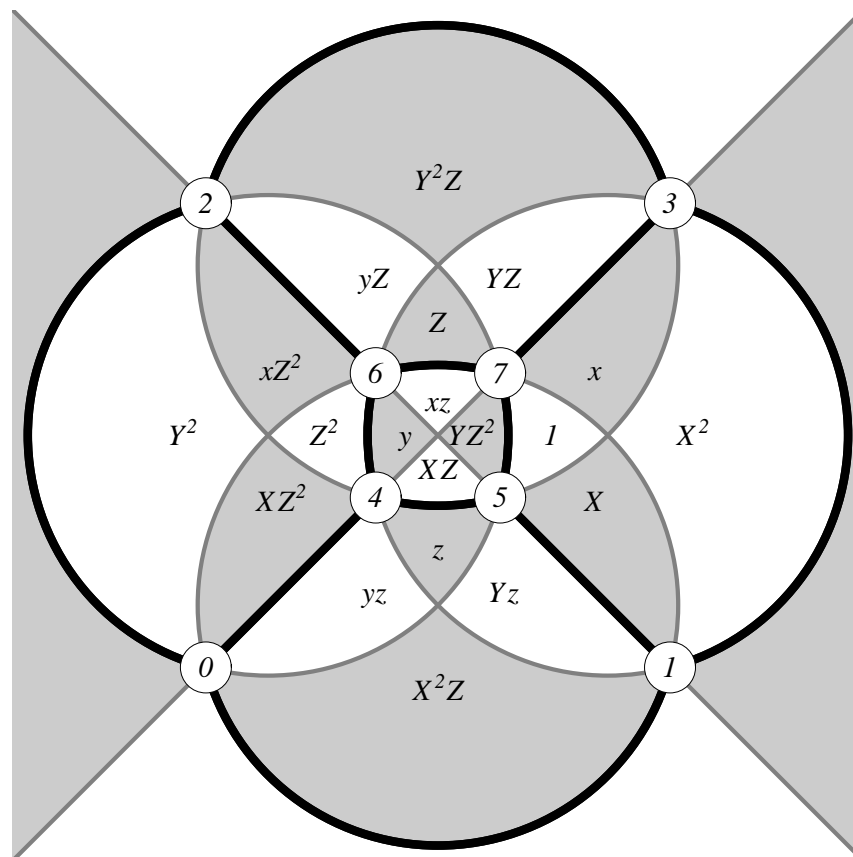
Anders Madsen

november 2006

**nr. 454 - 2006**



Anders Madsen



# KONKRETE ALGEBRAISKE STRUKTURER

1–3

Dette nummer af IMFUFAtekster omfatter de tre første hæfter i en serie med titlen ”Konkrete algebraiske strukturer”, som jeg har skrevet til algebrakurset (E1) på matematikuddannelsen ved IMFUFA på RUC.

Hæfterne skal ses i sammenhæng med en anden serie hæfter med titlen ”Abstrakte algebraiske strukturer”. Disse to serier udgør hver sin kæbe i en knibtang.

Naturligvis ville det være tomt (og frustrerende) at undervise i abstrakt algebra uden inddragelse af konkrete eksempler og det ville være fattigt (og perspektivforladt) kun at gennemgå konkrete eksempler uden at inddrage de underliggende abstrakte strukturer.

På den anden side er der en vis skønhed i at fremhæve den abstrakte karakter ved at isolere den og lade dens top-down karakter fremstå tydeligt som i det forkætrede forbillede ”Matematikens elementer” af Bourbaki. Starte med de groveste strukturer og efterhånden tilføje finere strukturelementer. Alle resultater, som går igen og igen, formuleres og bevises en gang for alle.

Ligeledes er der en tilfredsstillende forbindelse med at lade de enkelte konkrete strukturer stå så enkelt som muligt, uden overflødige dikkedarer, *das Ding an sich*. Og der er fornøjelsen ved at se det essentielt samme argument komme igen og igen i forskellige forklædninger.

Udover den æstetiske tilfredsstillende ved den rene abstraktion og den rene fornøjelse ved de konkrete detaljer har begge disse perspektiver en stor erkendelsesmæssig betydning og bidrager til udviklingen af kompetencer som er væsentlige for matematikere.

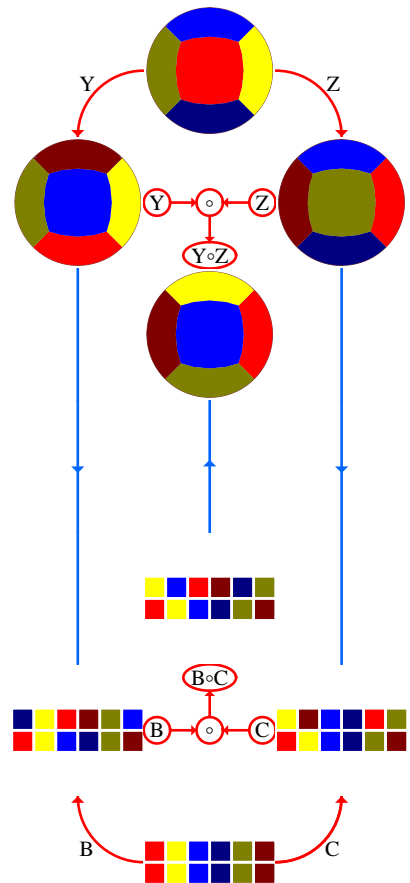
Jeg har valgt at fremhæve de to modsatrettede men samspillende perspektiver ved den opdeling som de to serier repræsenterer. De enkelte konkrete strukturer er fremstillet i enkeltstående fremstillinger uden indbyrdes referencer. Stof som forudsættes flere steder er medtaget hvert sted. Men udvalget af detaljer er foretaget på en sådan måde at det bedst muligt kan levere stof til den abstrakte del.

Den matematiske kerne for de enkelte hæfter, uden forbindende tekst og illustrationer, har foreligget tidligere i mere rå form beregnet på uddybning ved forelæsning og ikke egnet til selvstudium, ikke mindst på grund af utallige trykfejl og tanketorsk, som de studerende med stor tålmodighed har fanget. Dette skylder jeg dem tak for og derfor er hæfterne tilegnet alle tidligere og nuværende studerende på E1, som jeg takker for deres medvirken.

Anders Madsen, november 2006

Anders Madsen

# DREJNING SOM PERMUTATION



KONKRETE  
ALGEBRAISKE  
STRUKTURER

1

Dette er et hæfte i en serie med titlen ”Konkrete algebraiske strukturer”, som jeg har skrevet til algebrakurset (E1) på matematikuddannelsen ved IMFUFA på RUC.

Hæfterne skal ses i sammenhæng med en anden serie hæfter med titlen ”Abstrakte algebraiske strukturer”. Disse to serier udgør hver sin kæbe i en knibtang.

Naturligvis ville det være tomt (og frustrerende) at undervise i abstrakt algebra uden inddragelse af konkrete eksempler og det ville være fattigt (og perspektivforladt) kun at gennemgå konkrete eksempler uden at inddrage de underliggende abstrakte strukturer.

På den anden side er der en vis skønhed i at fremhæve den abstrakte karakter ved at isolere den og lade dens top-down karakter fremstå tydeligt som i det forkætrede forbillede ”Matematikens elementer” af Bourbaki. Starte med de groveste strukturer og efterhånden tilføje finere strukturelementer. Alle resultater, som går igen og igen, formuleres og bevises en gang for alle.

Ligeledes er der en tilfredsstillelse forbundet med at lade de enkelte konkrete strukturer stå så enkelt som muligt, uden overflødige dikkedarer, *das Ding an sich*. Og der er fornøjelsen ved at se det essentielt samme argument komme igen og igen i forskellige forklædninger.

Udover den æstetiske tilfredsstillelse ved den rene abstraktion og den rene fornøjelse ved de konkrete detaljer har begge disse perspektiver en stor erkendelsesmæssig betydning og bidrager til udviklingen af kompetencer som er væsentlige for matematikere.

Jeg har valgt at fremhæve de to modsatrettede men samspillende perspektiver ved den opdeling som de to serier repræsenterer. De enkelte konkrete strukturer er fremstillet i enkeltstående fremstillinger uden indbyrdes referencer. Stof som forudsættes flere steder er medtaget hvert sted. Men udvalget af detaljer er foretaget på en sådan måde at det bedst muligt kan levere stof til den abstrakte del.

Den matematiske kerne for de enkelte hæfter, uden forbindende tekst og illustrationer, har foreligget tidligere i mere rå form beregnet på uddybning ved forelæsning og ikke egnet til selvstudium, ikke mindst på grund af utallige trykfejl og tanketorsk, som de studerende med stor tålmodighed har fanget. Dette skylder jeg dem tak for og derfor er hæfterne tilegnet alle tidligere og nuværende studerende på E1, som jeg takker for deres medvirken.

Hæfterne findes i netudgaver med alle referencer som aktive links og med opdateringer:

<http://milne.ruc.dk/~am/algebra>

Anders Madsen, november 2006

# Indholdsfortegnelse

1	Prolog	
2	Drejningsgruppen	
1	Identifikation af gruppen	4
2	Regning med drejninger	7
3	Drejninger i forklædning	
1	Forklædt som permutation	9
2	Forklædt som ord	10
4	Undergrupper og klassifikation	
1	Tetraederækvivalens	14
2	Farveækvivalens	16
5	Billeder af gruppen	
6	Andre konfigurationer	
1	Konstruktioner	24
7	Epilog	
8	Eksempler og øvelser	
9	Stikordsregister	



# 1: Prolog

---

I dette hæfte skal du møde forskellige konkrete eksempler på algebraiske strukturer. Vi taler om en algebraisk struktur, når vi har en bestemt type objekter og en eller flere operationer på denne type objekter, der fører til et objekt af samme type, samt nogle regneregler for disse operationer.

Det mest oplagte eksempel har som objekter de reelle tal, som operationer de sædvanlige aritmetiske operationer med de sædvanlige regneregler.

Vi skal i det følgende se tilsyneladende meget forskellige strukturer, som dog er så meget beslægtede i strukturel henseende, at de kan beskrive samme problem. De kan derfor også i et vist omfang beskrive hinanden.

I den ene er objekterne de drejninger i rummet som drejer en vis given terning over i sig selv, og der er to operationer, nemlig sammensætning af to afbildninger og invertering af en enkelt afbildning.

I den anden er objekterne de afbildninger som fremkommer til beskrivelse af hvordan drejningerne ombytter hjørnerne af terningen. Det drejer som om bijektive afbildninger af en endelig mængde ind i sig selv. (Denne type afbildninger kaldes sædvanligvis permutationer, for hvilke der findes en elegant teori, som vi dog ikke kommer til at gøre brug af. Operationerne er også her sammensætning og invertering.

I den tredje struktur er objekterne ord skrevet med bogstaver fra specielle alfabeter og den ene operation er sædvanlig ordsammensætning (konkatenering).

Vi skal se hvordan disse strukturer kommer i spil ved at vi giver afkald på flere og flere informationer, og som det viser sig, overflødige informationer.

Endelig skal vi beskæftige os med frivilligt at give afkald på informationer, hvorved objekter, som efter dette informationstab er ens, slås sammen i klasser, og operationerne ”flyttes” til at være operationer på klasserne.

Fremstillingen kræver ingen forudsætninger ud over en intuitiv geometrisk opfattelse af drejninger og den simpleste viden om afbildninger, så som hvad der forstås ved sammensætning, invers, injektiv, surjektiv og bijektiv. Desuden introduceres diverse regulære legemer (terning, tetraeder etc.). Der vil være en opsamling med tydeliggørelse af den røde tråd i epilogen.

## 2: Drejningsgruppen

---

## 2.1: Identifikation af gruppen

---

*Vi vil kunne regne med drejninger!*

Hvis man sammensætter to drejninger, hvis akser har et skæringspunkt, får man en drejning hvis akse går gennem dette skæringspunkt. Dette faktum er ikke intuitivt klart og er heller ikke umiddelbart at bevise.

Vi vil i det følgende se nogle eksempler, hvor det nemt indses, og vi vil vise hvordan man kan benytte algebra til at beregne hvad der kommer ud af sammensætning af drejninger.

Vi vil se på visse specielle mængder af drejninger, nemlig sådanne som består af drejninger, som fører en vis given geometrisk konfiguration, f.eks. en terning, over i sig selv. Vi vil sige at konfigurationen er *invariant* mht en sådan drejning og at drejningen *bevarer* konfigurationen. Mængden af samtlige bevarende drejninger kalder vi for konfigurationens *drejningsgruppe*. Denne betegnelse er i overensstemmelse med det generelle begreb *gruppe*, hvilket dog ikke spiller nogen rolle for os lige nu.

Vi vil bygge på en rent intuitiv opfattelse af, hvad drejning er.

Studiet af drejningsgrupper for geometriske konfigurationer spiller en stor rolle i fysik og kemi, f.eks. ved studiet af *krystaller*.

*En generel måde til angivelse af drejninger*

Vi angiver en vilkårlig drejning ved en akse og en drejningsvinkel. Denne vinkel skal regnes med fortegn i forhold til følgende konvention. Aksen skal have en orientering, gennemløbsretning, og vinklen skal angive den vinkel som er mellem enhver linje vinkelret på aksen og den linje som fremkommer heraf ved drejningen. Dette skal ske i forhold til en omløbsretning i den normalplan som udspringer af disse to linjer, og denne omløbsretning skal være den sædvanlige (dvs mod uret), når planen betragtes fra den side af sig selv, som aksen peger ind i. Det noteres, at hvis vi ændrer orienteringen af aksen, så vil drejningsvinklen skifte fortegn. E1 E2

*En speciel måde til angivelse af drejninger*

Hvilke terningbevarende drejninger findes der da, altså drejninger som fører en given terning over i sig selv. Her tænker vi alene på terningen som en mængde af punkter. Vi ser altså i den forbindelse bort fra at vi kan kende forskel på dens sider.

Når vi skal bestemme drejningerne er det imidlertid bekvemt at tænke på at siderne er forsynet med et antal øjne. Lad os derfor benævne siderne med det tal som angiver antallet af øjne. På en sædvanlig terning vil siderne 1, 2, 3 da udgøre en højreskrue, hvilket per definition betyder at den korteste drejning som fører 1 over i 2 set fra 3 er en drejning mod uret. Herudover er placeringen af siderne bestemt af at modstående sider har summen 7.

En drejning vil da resultere i at siderne skifter placering i forhold til en vis udgangsposition. Lad os tænke os terningen lagt på et bord som har en fremhævet kant (en forkant måske) og på denne et fremhævet hjørne (det venstre måske) på en sådan måde at terningens ene hjørne ligger i det fremhævede hjørne. Vi kan da angive en placering ved et par af sidenumre, det første er nummeret på den side som er lodret over den fremhævede bordkant og det andet nummeret på den side som vender op. Man kan overbevise sig om at to forskellige drejninger fører til forskellige placeringer ved at udnytte at en drejning er entydigt fastlagt ved dens virkning på tre punkter som ikke ligger på samme linje. Ø3 Ø4

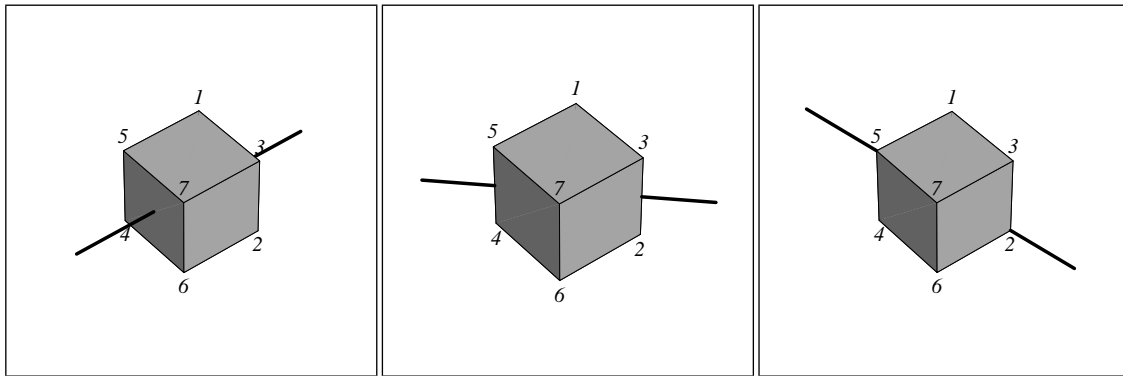
*En fuldstændig liste over drejningerne*

Vi indser nemt at der er 24 mulige placeringer. Der er derfor højst 24 mulige drejninger. Vi vil vise at der faktisk er 24 drejninger ved opstille en liste. Men først kære læser en lille formaning: Snyd ikke dig selv for den lykkefølelse der er forbundet med selv at lave en liste inden afsløringen, som følger nu:

De mest oplagte drejninger har en akse som går gennem midtpunkterne på to modstående sider med en vinkel som er enten  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  eller  $270^\circ$ , hvor den sidste også kan angives som  $-90^\circ$ . Der er tre af den slags akser og for hver akse tre drejninger. Vi kalder disse 9 drejninger for *sidebevarende*. (Se Figur 1)

Den næste type har akser som forbinder midtpunkterne på to modsatte kanter, kanter som er parallelle og ikke kanter af samme side. Her er der 6 mulige akser og for hver sådan akse netop en drejning, nemlig den med vinklen  $180^\circ$ . Vi kalder disse 6 drejninger for *kantbevarende*. (Se Figur 1)

Ved en diagonal vil vi forstå en linje som går gennem to diametralt modsatte punkter. Det er ikke helt så oplagt, men lidt leg med en terning kan overbevise en om at enhver diagonal også er drejningsakse for en drejning, som ved gentagelse tre gange bringer terningen tilbage i sin udgangsposition og derfor må have en vinkel på  $120^\circ$  eller  $-120^\circ$ . Der er 4 diagonaler og for hver af dem to drejninger. Vi kalder disse 8 afbildninger for *hjørnebevarende*. (Se Figur 1)



Figur 1. De tre drejningstyper: sidebevarende, kantbevarende, hjørnebevarende. Hjørnenummereringen forklares senere

Vi opfatter også den identiske afbildning som en drejning, selvom den ikke har en entydigt bestemt akse, og vi når dermed op på netop 24 drejninger ialt. Ø5 Ø6

*Første mål nås: sammensætning af drejninger giver drejning*

Vi har dermed fundet samtlige drejninger, der kan ikke være flere end dem vi umiddelbart fandt oplagte. Vi har samtidig set at der svarer netop en drejning til hver af de mulige placeringer. Herved kan vi også besvare spørgsmålet om sammensætning af drejninger: Enhver sammensætning af to drejninger giver anledning til en placering, og denne også kan opnås ved en enkelt drejning. Så hvad angår virkningen på siderne vil en sammensætning af to drejninger igen give en drejning.

## 2.2: Regning med drejninger

*Næste mål: regning med sammensætning af drejninger*

Vi har nu alene ved brug af (intuitive) geometriske betragtninger identificeret drejningerne. Nu gælder det sammensætning.

Sædvanligvis skrives sammensætningen af to afbildninger  $F$  og  $G$  som  $F \circ G$ . Undertiden anvendes den bekvemme konvention at skrive  $FG$  i stedet for. Vi vil til lejligheden benytte endnu en bekvem skrivemåde, nemlig  $\overline{F}$  for  $F^{-1}$ . For den identiske afbildning benyttes  $I$ . De velkendte regler for regning med sammensætning kan da udtrykkes således:

$$F(GH) = (FG)H, \quad IF = FI = F, \quad F\overline{F} = \overline{F}F = I, \quad \overline{FG} = \overline{G}\overline{F}.$$

Vi kan bestemme sammensætningen af to drejninger vha en fysisk terning. Det er dog et nærliggende ønske at kunne beregne disse sammensætninger uden at skulle gribe til fysiske repræsentationer.

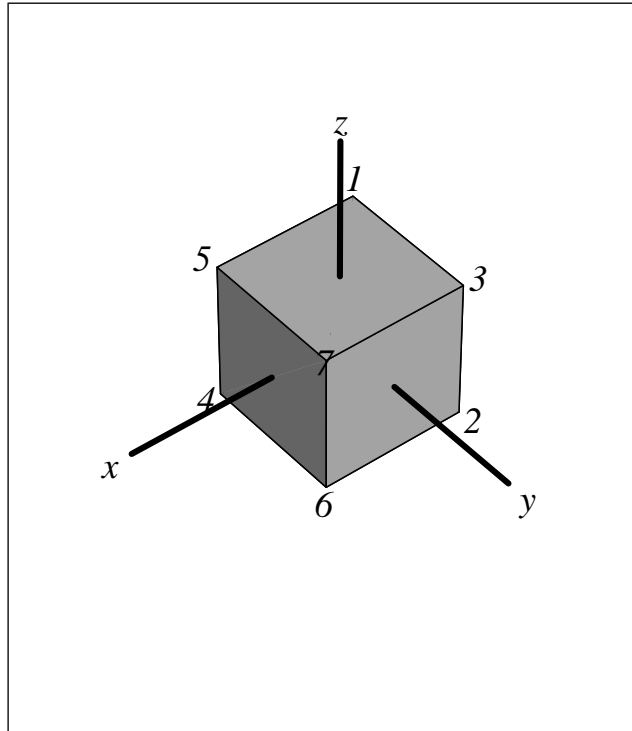
Til det formål indfører vi et koordinatsystem. En (oplagt) metode til *algebraisering* ville nu være at beskrive de enkelte drejninger med formler for hvordan de virker i dette koordinatsystem og derpå forsøge at beregne en formel for sammensætningen. Dette er da også den mest oplagte måde og den kan bekvemt gennemføres vha lineær algebra, hvor hver enkelt drejning repræsenteres af en matrix og sammensætning af drejninger svarer til multiplikation af matricer.

I den konkrete situation, hvor vi kun betragter en afgrænset mængde af drejninger kan vi imidlertid slippe langt nemmere. Her vil vi blot benytte koordinatsystemet til at forsyne os med nogle bekvemme notationer for hjørnerne og for de enkelte drejninger.

Vi tænker os en helt bestemt *udgangsposition* for terningen valgt og et koordinatsystem anbragt således at koordinatsystemets begyndelsespunkt er terningens centrum, og akserne er parallelle med kanterne, som har længden 2. Vi nummererer hjørnerne på følgende måde ( $a = -1$ )

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ (a, a, a) & (a, a, 1) & (a, 1, a) & (a, 1, 1) & (1, a, a) & (1, a, 1) & (1, 1, a) & (1, 1, 1) \end{array}$$

Metoden for nummerering er principielt ligegyldig for vores formål, de enkelte hjørner skal bare have et nummer. Den her valgte metode besidder nogle mnemotekniske bekvemmeligheder, f. eks. vil numre for diametralt modsatte punkter have summen 7. (Hvis vi sætter  $a = 0$  vil koordinatsættet give cifrene i nummerets fremstilling i totalsystemet med  $x$ -koordinaten som *mindst* betydende ciffer.)



Figur 2. Terning anbragt i koordinatsystem med nummerering af hjørnerne som forklaret i teksten. (Fanget i korrekturen: ombyt  $1 \leftrightarrow 4$  og  $3 \leftrightarrow 6$ )

### 3: Drejninger i forklædning

---

#### 3.1: Forklædt som permutation

---

*Nok at kende hjørnevirkningen!*

En drejning vil være entydigt bestemt af sin virkning på hjørnerne og kan derfor repræsenteres af en afbildning af hjørnemængden  $\{0, \dots, 7\}$  ind i sig selv, en afbildning som klart er en bijektion. Afbildningen kan sammenfattes i en tabel, f.eks. vil den afbildning af hjørnemængden, som svarer til en drejning på  $90^\circ$  om  $x$ -aksen, lad os kalde den  $X$ , give anledning til følgende tabel:

$h$	0	1	2	3	4	5	6	7
$X(h)$	2	3	6	7	0	1	4	5

Vi kan samle flere afbildninger i en tabel, f.eks. vil drejningerne på  $90^\circ$  om  $y$ -aksen og  $z$ -aksen, lad dem hedde  $Y$  og  $Z$ , give anledning til følgende tabel

$h$	0	1	2	3	4	5	6	7
$Y(h)$	4	0	6	2	5	1	7	3
$Z(h)$	1	3	0	2	5	7	4	6

### Regning med hjørnevirkninger

Enhver drejning bliver da repræsenteret af en afbildning, som vi vil kalde den tilhørende *hjørnevirkning*. S sammensætningen af to drejninger vil da blive repræsenteret af sammensætningen af de to hjørnevirkninger. Den drejning som fremkommer ved først at dreje  $90^\circ$  om  $y$ -aksen og dernæst  $90^\circ$  om  $x$ -aksen vil da have hjørnevirkningen  $XY$ , som det er nemt at beregne. Den har følgende tabel

$h$	0	1	2	3	4	5	6	7
$XY(h)$	0	2	4	6	1	3	5	7

Af denne tabel ses det at hjørnerne 0 og 7 er fixpunkter for  $XY$ . Det betyder at vi har at gøre med en af drejningerne om diagonalen (0, 7) og da 1 drejes i 2 måder være tale om den med drejningsvinklen  $120^\circ$ . Vi har altså kunnet beregne den sammensatte drejning uden at skulle foretage fysiske manipulationer.

Vi tager endnu et eksempel,  $XYZ$ :

$h$	0	1	2	3	4	5	6	7
$XYZ(h)$	2	6	0	4	3	7	1	5

Vi ser at  $XYZ$  ombytter endepunkterne både af kanten mellem 0 og 2 og den modstående kant, (mellem 7 og 5). Vi har altså at gøre med den drejning på  $180^\circ$  hvis akse forbinder disse kanters midtpunkter.

På denne måde kan vi regne os frem til virkningen af enhver kombination af drejninger. Vi behøver blot som udgangspunkt at kende hjørnevirkningsfunktionen af hver af de 24 drejninger.

Ø7 , Ø8 , Ø9 , Ø10 , Ø11, Ø12, Ø13

## 3.2: Forklædt som ord

---

*Glem det uvæsentlige — fokuser på det strukturelle*

Vi har i det foregående set at vi kan lave en effektiv kalkyle, selv om vi har givet afkald på en masse information. Det kan lade sig gøre når vi beholder den væsentlige information. Vi skal nu se hvordan vi kan gå endnu videre i retning af at give afkald på information og alligevel effektivisere beregningerne.

I første omgang ignorerede vi at drejningerne er defineret som afbildninger af hele rummet ind i sig selv, og nøjedes med at se på dem som afbildninger af hjørnemængden ind i sig selv. Nu vil vi helt glemme at de er afbildninger, og

fokusere på at de er en slags objekter som kan kombineres i overensstemmelse med visse regler. Vi vil i det følgende benytte samme betegnelse for en drejning som for dens hjørnevirkning.

Vi indleder dette program med at observere at enhver drejning kan opnås som resultatet af gentagen brug af de tre drejninger  $X$ ,  $Y$  og  $Z$ , fordi enhver placering af terningen kan fås på denne måde med udgangspunkt i grundpositionen, og fordi enhver drejning svarer til en vis placering. Ø14

Vi har ovenfor set at drejningen på  $120^\circ$  om hoveddiagonalen med endepunkterne 0 og 7 kan skrives som  $XY$ . En simpel overvejelse, som overlades til læseren, viser at enhver drejning kan opnås ved gentagen sammensætning af  $X$ ,  $Y$  og  $Z$ . Vi udtrykker dette ved at sige at mængden af terningbevarende drejninger er *frembragt* af  $\{X, Y, Z\}$ . Man kan endda nøjes med sammensætning af maksimalt tre af disse drejninger. En sådan kortest mulig form kalder vi for en  $XYZ$ -*kortform*. Den er ikke nødvendigvis entydigt bestemt.

*Vi sætter ord på og regner med dem*

Med den skrivemåde for sammensætning, som vi enedes om ovenfor, vil der til hver sammensætning af denne art være knyttet et *ord* skrevet udelukkende med  $X, Y$  og  $Z$  f.eks. " $XYYZYYYXX$ " og hvert sådant ord svarer til en drejning. Forskellige ord kan svare til samme drejning, det gælder f.eks. de to ord " $XXXX$ " og " $YYYY$ " som begge svarer til den identiske afbildning. Hvis vi kender ord for to drejninger, da vil et ord for den sammensatte drejning fremkomme ved at skrive de to ord i forlængelse af hinanden. F.eks. er " $XYZ$ " " $XXY$ " = " $XYZXXY$ ". (Denne operation på ord kaldes i programmeringssammenhæng for *konkatenering*.)

Pointen ved denne leg med ord er nu, at selv om sammensætning af afbildninger giver anledning til et længere ord, så er det muligt ved hjælp af visse regler at gøre ordene kortere og kortere indtil vi kan identificere hvilken drejning det beskriver. For eksempel ses at ordet " $XYYYYXXX$ ", som fremkommer ved konkatenering af " $XYYY$ " og " $YXXX$ ", kan reduceres til " $XXXX$ " som beskriver den identiske afbildning. Dette leder os til endnu en konvention, nemlig også at betragte det *tomme ord*, ordet uden bogstaver, som vi vil lade være betegnelse for den identiske afbildning. Udover at skrive "" for det tomme ord, vil vi også betegne det med symbolet  $I$ , som altså er et symbol for det tomme ord og ikke et ord med det ene bogstav  $I$ . Vi vil i det hele taget benytte symboler for ord. Hvis vi f.eks. sætter  $A = "XY"$  og  $B = "YYX"$ , da er  $AB$  betegnelse for konkatenering af  $A$  og  $B$  og vi har at  $AB = "XYYYX"$ . Vi vil benytte betegnelsen  $[A]$  for den drejning som svarer til ordet  $A$ . Vi har altså at  $["XY"] = XY$ .



### *Find det mest sigende ord*

Hvis nu to ord  $A$  og  $B$  betegner den samme afbildning, altså  $[A] = [B]$  så vil vi sige at de to ord *har samme betydning* og vi vil skrive at  $A \sim B$ . Vi ønsker at formulere nogle *ordomskrivningsregler*, der gør det muligt at omforme et ord til et kortere ord med samme betydning. Vi vil sætte lighedstegn mellem to ord for at markere at de har samme betydning, selvom det jo er misbrug af lighedstegnet.

Mange regler udledes af at terningens drejninger alle har en vis *orden*, som er det antal gange, de skal gentages for at give den identiske afbildning.

Vi har allerede udnyttet dette ved formulering af den regel som siger at man kan fjerne delordene "XXXX" og "YYYY" fra et ord uden at dette ord skifter betydning. Begge ordene "X" og "Y" har altså orden 4. Dette er de simpleste ordomskrivningsregler.

### *Nogle nyttige formler*

Vi har brug for nogle (få) ordomskrivningsregler, som er baseret direkte på vores geometriske viden. Denne viden kan f.eks. opnås ved at bruge hjørnevirkningerne.

Vi har ovenfor på denne måde set at  $XY$  er en drejning på  $120^\circ$  og derfor har ordenen 3 og at  $XYZ$  har ordenen 2. Vi får også brug for at  $XYX$  har orden 2, så check eventuelt lige det.

Vi kan igen ved regning på hjørnevirkningerne konstatere at  $XY = YZ = ZX$ . (Se også E15.) Da  $XYX$  har orden 2 og  $XY$  har orden 3 har vi at  $I = XYXXYX = XYXYXY$  hvoraf vi slutter at  $XYX = YXY$ .

Vi har nu et lille arsenal af ordomskrivningsregler. Ved at benytte dem kan vi udvide arsenalet lidt, f.eks. fås at  $XXYYZZ = XYZXYZ = I$  og heraf at  $XXYY = XXYYZZZZ = ZZ$  og tilsvarende at  $YYZZ = XX$  osv. Lad os resumere vort lille arsenal af ordomskrivningsregler:

$$XY = YZ = ZX, XYX = YXY, XYXYXY = I, XXYYZZ = I.$$

Vi kan komme ret langt med dette arsenal.

(Vi har her og vil også i det følgende undertiden undlade anførselstegnene.)

Det kan (uden spidsfindigheder) vises at det alene ved hjælp af de nu anførte omskrivningsregler er muligt at bringe ethvert ord på  $XY$ -kortform, hvorved

den tilknyttede drejning kan afsløres. Vi vil ikke gå i detaljer, men nøjes med et par eksempler, hvor vi benytter de omskrivninger vi lige har fundet:

$$\begin{aligned} YXYXYX &= YXY \quad XYX = XYX \quad YXY = XYXYXY = I, \\ XYYYXYYXXY &= XYY \quad YXY \quad YXXYY = \\ XYY \quad XYX \quad YYXXYY &= XYYXYXYXYXY = \\ XYYXYXYXYXYXY &= YYYXYXYXYXY = \\ YYYXYXYXYXY &= YXYXY \end{aligned}$$

Vi kan gøre denne kalkyle mere effektiv ved at inkorporere inversdannelse i ordkalkylen. Vi indfører endnu tre bogstaver i alfabetet nemlig  $\overline{X}$ ,  $\overline{Y}$  og  $\overline{Z}$ , som vi kalder de inverse bogstaver. Vi definerer også for hvert ord det inverse ord, som det ord som fremkommer når hver bogstav erstattes af sit inverse og skrives i modsat rækkefølge. Vi betegner det inverse af ordet  $A$  med  $\overline{A}$ , f.eks, " $XXY\overline{X}\overline{Y}$ " = " $\overline{Y}X\overline{Y}\overline{X}\overline{X}$ ". Det følger af regnereglerne for sammensætning af afbildninger at det inverse af et ord hørende til en vis afbildning netop er ordet svarende til den inverse af denne afbildning. På formel  $\overline{[A]} = [\overline{A}]$ . Enhver forekomst af formen  $A\overline{A}$  kan fjernes fra et ord uden at det ændrer betydning.

De enkelte afbildninger kan nu skrives vha kortere ord og omformningsreglerne bliver også mere kortfattede.

Denne måde at foretage drejningsgruppens algebra er ikke gennemgået her for at give et konkret instrument til praktisk brug. I nærværende sammenhæng er det den principielle mulighed for at flytte beregningsarbejdet fra ét algebraisk univers til et andet, som er i fokus. Derfor vil jeg heller ikke gå nærmere ind på hvordan man i praksis ville gribe en sådan opgave an. For illustrationens skyld følger her to tabeller over omformninger, som dels kan bruges i reduktionerne, dels kan bruges som en slags facitliste. Ø16

*Tabel over alle ord på to forskellige bogstaver, som ikke kan skrives med færre bogstaver. Alle ord i samme række giver samme drejning. De 8 drejninger er netop de hjørnebevarende. Vi skriver  $x$  i stedet for  $\overline{X}$  osv.*

XY	YZ	ZX
Xy	yz	zX
xY	Yz	zx
xy	yZ	Zx
Xz	YX	zY
xZ	Yx	ZY
XZ	yX	Zy
xz	yx	zy

xxz	XXz	xyx	XYX	xzy	XzY	yxy	YXY	yyZ	YYZ	yZx	YZX	Zxx	ZXX	zyy	zYY
xxY	XXY	xYz	XYZ	xzx	XZX	yxx	yXX	Yzz	YZZ	zxz	ZXZ	zyx	ZyX	zzy	ZZy
Xyy	XYY	xzz	xZZ	yxz	YxZ	yyx	YYx	yzy	YZY	zXy	ZXY	zyz	ZYZ	zzX	ZZX
xxZ	XXZ	xYx	XyX	xZY	XZy	yXy	YxY	yyz	YYz	yzX	Yzx	zxx	zXX	Zyy	ZYY
xyy	XXy	xyZ	Xyz	xZx	XzX	Yxx	YXX	yzz	yZZ	zXz	ZxZ	zYX	ZYx	zzY	ZZY
xyy	xYY	Xzz	XZZ	yXZ	YXz	yyX	YYX	yZy	YzY	zxY	Zxy	zYz	ZyZ	zzx	ZZx

Tabel 1. Tabel over alle ord på tre bogstaver, som ikke kan skrives med færre bogstaver. Alle ord i samme række giver samme drejning. De 6 drejninger er netop de kantbevarende. Vi skriver  $x$  i stedet for  $\overline{X}$  osv.

## 4: Undergrupper og klassifikation

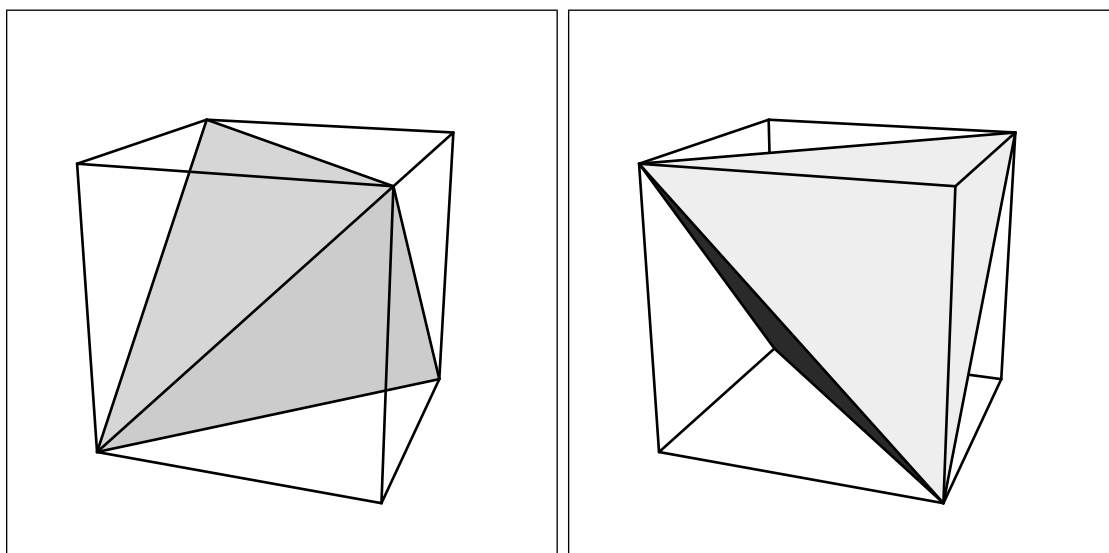
### 4.1: Tetraederækvivalens

*Udvidelse af konfigurationen og indskrænkning af gruppen*

Vi vil nu gå over til at studere andre konfigurationer som er baseret på terningen. Vi vil se på hvilket forhold der er mellem terningens drejningsgruppe og disse andre konfigurationers drejningsgruppe. Det er ikke overraskende at dette vil føre til at færre drejninger vil bevare den udvidede struktur. Vi starter med at tilføje et tetraeder til terningen.

*Tetraederbevarende drejninger*

Lad os betragte delmængden  $\{1, 2, 4, 7\}$  af hjørnemængden. Vi kan ved inspektion overbevise os om at disse hjørner parvis er endepunkterne for en diagonal på en side af terningen. De indbyrdes afstande mellem disse punkter er derfor konstant og de vil derfor udgøre hjørnerne i et regulært *tetraeder*. Af denne beskrivelse følger også at de resterende punkter i hjørnemængden kan rekonstrueres ud fra denne delmængde. Vi ønsker at finde de drejninger som bevarer dette tetraeder. Vi observerer at enhver tetraederbevarende drejning også er terningbevarende.



Figur 3. To tetraedere hvis hjørner også er hjørner i terningen. Læseren bedes selv sætte hjørnenenumre på figuren

Det omvendte er ikke tilfældet. f.eks. vil drejningen  $X$ , ( $90^\circ$  om  $x$ -aksen) føre 1, 2, 4, 7 over i 3, 0, 5, 6. De terningbevarende drejninger falder altså i to klasser: de tetraederbevarende og de ikke-tetraederbevarende.

Vi vil argumentere for at de to klasser er lige store.

Lad da  $A$  være tetraederbevarende, da vil  $XA$  ikke være det, da  $X$  ikke er det. Det betyder at tilordningen  $A \mapsto XA$  definerer en afbildning af mængden af bevarende ind i mængden af ikke-bevarende.

Den er injektiv. Thi hvis  $A$  og  $B$  er forskellige drejninger, da vil  $XA$  og  $XB$  også være forskellige.

Den er surjektiv, thi hvis  $C$  er ikke-bevarende da vil  $C$  være billede af  $\overline{X}C$ , som er bevarende.

Af ræsonnementet følger også at enhver drejning, der svarer til et lige antal bogstaver i en  $XYZ$ -fremstilling, er tetraederbevarende, og de øvrige ikke er det. Lad os kalde de to klasser for de lige og de ulige.

Hvis vi siger at to drejninger er *tetraederækvivalente* hvis de gør det samme ved tetraederet, så vil to drejninger være tetraederens netop hvis de begge er lige eller begge er ulige. Der findes da netop to klasser bestående af indbyrdes tetraederækvivalente drejninger, nemlig de lige og de ulige. Hvilken klasse en sammensætning af to drejninger havner i afhænger nu kun af hvilke klasser de

to drejninger er taget fra og vi kan formulere dette kort: lige sammensat med lige giver lige, lige sammensat med ulige giver ulige osv.

Hvis vi ønsker at kunne skrive drejningerne i den indskrænkede gruppe som ord med bogstaver, som selv svarer til drejninger i gruppen, kan vi jo ikke bruge  $X$  og  $Y$ . Lad  $S$  og  $T$  betegne  $XY$  og  $XX$ . Ved at vise (men det tager vi os ikke af her) at ethvert ord med et lige antal bogstaver i alfabetet med bogstaverne  $X$  og  $Y$  kan reduceres til et ord skrevet i alfabetet med bogstaverne  $S$  og  $T$  kan vi vise, at mængden af tetraederbevarende drejninger er frembragt af  $\{S, T\}$ . Vi kan benytte omskrivningsreglerne  $S^3 = T^2 = (TS)^3 = I$  til at finde en kort fremstilling. Ø17

#### *Lidt perspektiv på ordproblemer*

Hvis man tager et vilkårligt alfabet og definerer nogle omskrivningsregler, så har man et problem. Nemlig det at finde en algoritme som kan afgøre om to ord betyder det samme, altså om det ene kan omskrives til det andet. Dette er en ret løs formulering af det såkaldte ”ordproblem”, som har udfordret matematikerne meget siden 1911, hvor Dehn gjorde opmærksom på at dette var et fundamentalt problem. Især hvis man stiller den meget ambitiøse opgave at finde en universel algoritme, altså en som kan bruges i alle situationer. I 1955 præsenterede Novikov en meget overraskende afklaring. Der findes et eksempel, hvor det er *uafgørligt* om der findes en algoritme. Det vil gå for vidt her at gå nærmere ind på hvad der forstås ved uafgørlig, men det er uhyggeligt.

## 4.2: Farveækvivalens

---

### *Lad os lægge farver på*

Lad os nu tænke os at terningens sider er *farvet*, således at modstående sider har samme farver og nabosider altid er forskellige. Lad os for at være konkrete sige at siderne 1 og 6 er blå, siderne 2 og 5 er gule og siderne 3 og 4 er røde. Vi vil sige at to drejninger er *farveækvivalente* hvis man ikke kan se forskel på virkningen af de to drejninger, hvis man kun tager hensyn til farverne og negligerer sidetallene.

Lad os først notere os at der netop er fire drejninger, som er farveækvivalente med den identiske afbildning, hvis virkning altså ikke kan ses, lad os kalde dem *virkningsløse*. Det drejer sig om de tre drejninger på  $180^\circ$  om koordinataksene,  $XX$ ,  $YY$  og  $ZZ$  udover den identiske afbildning selv. Dette kan ses ved en inspektion af listen. Vi lader  $H$  betegne denne klasse af virkningsløse afbildninger.

Hvis nu to drejninger  $A$  og  $B$  er farveækvivalente da må  $A^{-1}B$  være virkningsløs. Der findes altså en virkningsløs drejning  $C$  således at  $A^{-1}B = C$  eller med andre ord  $B = AC$ . Den klasse af drejninger, som er farveækvivalente med  $A$ , udgøres altså af drejningerne af formen  $AC$ , hvor  $C$  gennemløber de virkningsløse drejninger. Der er derfor lige mange elementer i hver klasse.

Eksempelvis består klassen af drejninger som er farveækvivalente med  $X$  af  $X$ ,  $XXX$ ,  $XYX$  og  $XZZ$ .

Vi noterer at der generelt er 4 drejninger i hver klasse, og at der derfor er ialt 6 klasser. Lad os for enhver drejning  $A$  med  $[A]$  betegne den klasse som indeholder  $A$ . Vi kan da overbevise os om at de 6 klasser er  $[I], [X], [Y], [Z], [XY], [YX]$ , da man ved elementær sammenligning kan se at der blandt disse ikke nogen indbyrdes farveækvivalente. Vi kan lave en tabel over klasserne:

$[I]$	$I$	$XX$	$YY$	$ZZ$	ingen farveændring
$[X]$	$X$	$\bar{X}$	$XYX$	$XZZ$	ombytning af gul og rød
$[Y]$	$Y$	$YXX$	$\bar{Y}$	$YZZ$	ombytning af blå og rød
$[Z]$	$Z$	$ZXX$	$ZYY$	$\bar{Z}$	ombytning af gul og blå
$[XY]$	$XY$	$\bar{X}\bar{Y}$	$X\bar{Y}$	$\bar{X}Y$	blå $\rightarrow$ gul $\rightarrow$ rød $\rightarrow$ blå
$[YX]$	$YX$	$Y\bar{X}$	$\bar{Y}\bar{X}$	$\bar{Y}X$	rød $\rightarrow$ gul $\rightarrow$ blå $\rightarrow$ rød

*Tabel 2. Hver række i skemaet er en klasse af ækvivalente drejninger. I kolonnen yderst til venstre er klassen angivet ved en typisk repræsentant. Resten af rækken udgøres af klassens medlemmer. I klassens række er også angivet dens farvevirkning*

I tabellen indgår også en beskrivelse af *farvevirkningerne*, som vi nu vil definere og beskrive. Farvningen er foretaget på en sådan måde at to ensfarvede sider efter en drejning vil befinde sig på et sted, hvor der også før drejning befandt sig et par ensfarvede sider som vi vil kalde den drejede farve. Den afbildning som til en farve knytter den drejede farve vil vi kalde for *farvevirkningen*. Det følger nu videre af definitionen på farveækvivalens at to farveækvivalente drejninger vil have samme farvevirkning. Vi behøver derfor kun at beregne farvevirkningen for en af drejningerne i hver klasse og kan selvfølgelig med fordel vælge den enkleste, i klassen  $[X]$  er det naturligvis  $X$ . Resultatet fremgår som nævnt af skemaet.

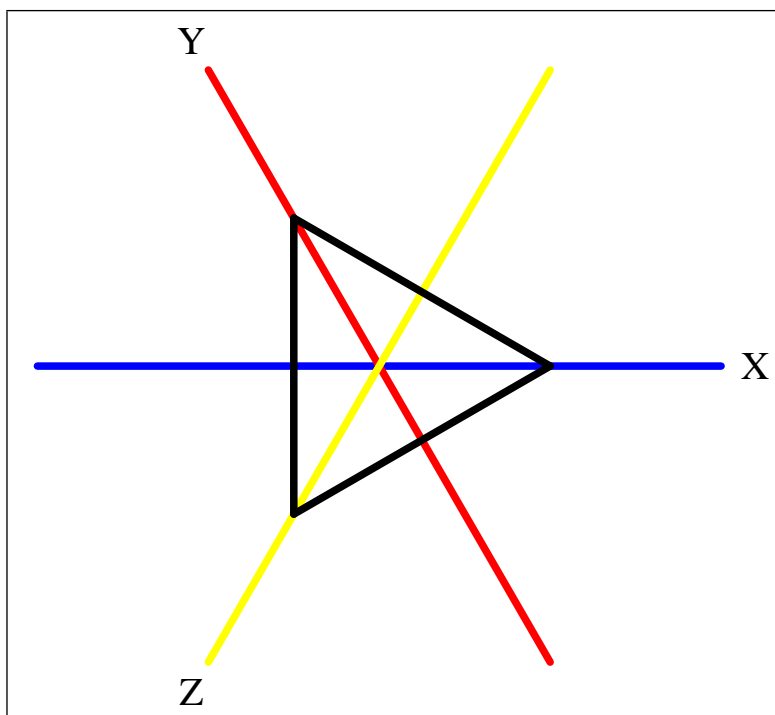
### *Regning med farvevirkninger*

Ved at benytte tabellen kan vi se at hver farveækvivalensklasse har forskellig farvevirkning. Farvevirkningen er derfor en entydig indikator for klassen.

Kender vi farvevirkningen kender vi også klassen. Da sammensætningen af to drejninger har en farvevirkning som er sammensætningen af deres farvevirkninger, så kan vi regne med farvevirkningerne i stedet for med drejningerne. Heraf ser vi at vi også kan regne med klasserne i den forstand at klassen for en sammensætning af to drejninger alene afhænger af hvilke klasser de to drejninger tilhører. Denne regel kan vi sammenfatte i følgende skema:

	$I$	$X$	$Y$	$Z$	$XY$	$YX$
$I$	$I$	$X$	$Y$	$Z$	$XY$	$YX$
$X$	$X$	$I$	$XY$	$YX$	$Y$	$Z$
$Y$	$Y$	$YX$	$I$	$XY$	$Z$	$X$
$Z$	$Z$	$XY$	$YX$	$I$	$X$	$Y$
$XY$	$XY$	$Y$	$Z$	$X$	$YX$	$I$
$YX$	$YX$	$Z$	$X$	$Y$	$I$	$XY$

Tabel 3. Tabel for regning med klasser. Hver klasse er angivet ved et repræsentativt medlem af den. Den kan også opfattes som tabel for sammensætning i gruppen af drejninger/spejlinger af en ligesidet trekant, se følgende tekst.



Figur 4. Den ligesidede trekant spejles i sig selv ved spejling i den blå højde ( $X$ ), den røde højde ( $Y$ ) og den gule højde ( $Z$ )

Betragt nu en ligesidet trekant, hvor højderne er farvet blå, gul og rød. Vi vil lade  $X$  (også) betegne spejlingen i den blå højde og tilsvarende for de to andre farver og symboler. Da vil  $XY$  være den (plane) drejning om højdernes skæringspunkt som fører den blå højde over i den gule, og  $YX$  er dens inverse.

Gruppen af samtlige drejninger og spejlinger indeholder 6 elementer og de kan alle frembringes af  $X$  og  $Y$ . De fremkommer faktisk ved at bruge de repræsentanter som er valgt i Tabel 3 og denne angiver også hvordan sammensætning kan beregnes, hvilket kan indses ved simpel inspektion.

Det er oplagt hvad der skal forstås ved farvevirkningen af disse plane afbildninger og det kan checkes at disse farvevirkninger kan aflæses af farvevirkningsskemaet ovenfor i den alternative fortolkning. Det er derfor nærliggende at identificere farvevirkningen med den tilsvarende afbildning af trekanten.

Vi kan på denne måde opfatte farvevirkningen som en karakteristisk egenskab ved hver klasse. Vi kan beregne farvevirkningen af en sammensætning af to drejninger ud fra kendskab til farvevirkningen af de to drejninger. Vi skal bare slå op i tabellen.

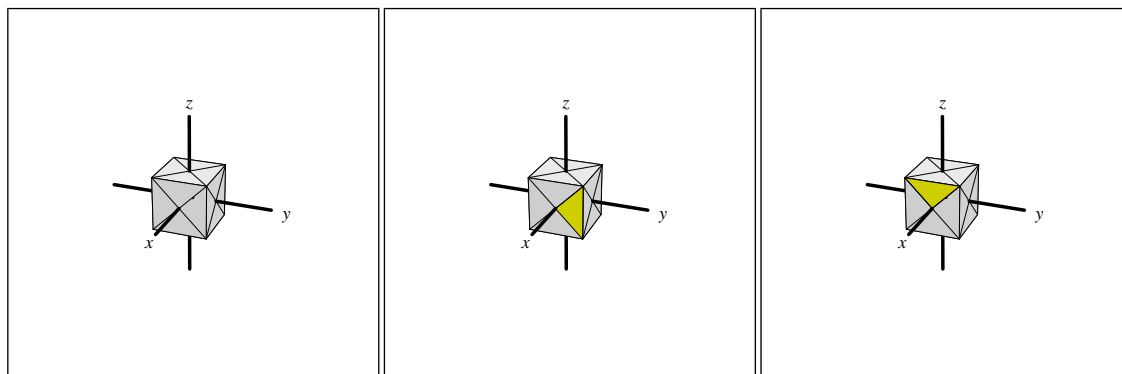
## 5: Billeder af gruppen

---

### *Billeder af gruppen vha fliselægning*

Hver side af terningen deles af dens diagonaler i fire trekanter. På denne måde deles terningens overflade i 24 trekanter, som vi vil kalde fliser. Disse fliser udgør tilsammen en *fliselægning*.

Enhver drejning i drejningsgruppen vil føre enhver flise over i en flise. To forskellige drejninger kan ikke føre to forskellige fliser over i den samme, hvilket fremgår af følgende argument: Hver flise har et centralt hjørne, og dette må føres over i det centrale hjørne af billedflisen ved begge afbildninger. De to hjørner i trekanten, som også er hjørner for terningen, må føres over i de to tilsvarende hjørner, men dette kan kun ske på en måde, fordi den indbyrdes orientering af hjørnerne skal bevares. Derfor vil de to drejninger stemme overens i de tre hjørnepunkter og derfor overalt.



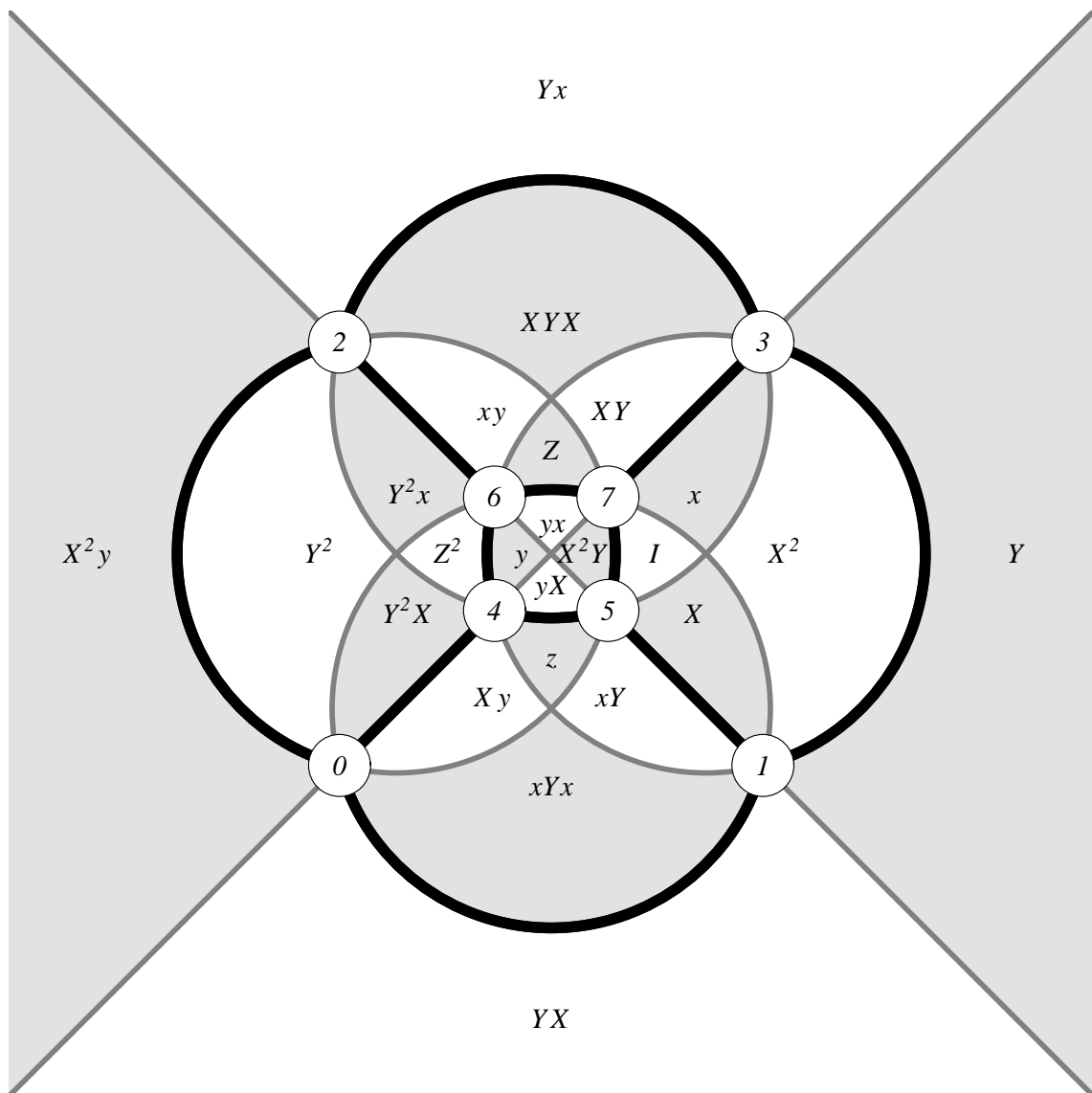


*Figur 5. Terningen deles i fliser (venstre). Grundflise markeres (midten). Grundflise efter drejning (højre)*

Vi udpeger nu en bestemt af fliserne til at være en slags *referenceflise*. Da der er 24 drejninger må der blive 24 billeder af denne referenceflise. Vi har jo lige set at hver afbildning må have sin egen billedflise. Enhver flise vil derfor være billede af referenceflisen! Når vi til hver drejning knytter den billedflise får vi så en bijektiv afbildning mellem drejningsgruppen og fliselægningen. Hvis vi skriver drejningens navn på den tilhørende flise får vi en illustration af drejningsgruppen.

#### *Plan illustration af fliselægning*

Med et lille kunstgreb kan vi illustrere dette uden at skulle lave en tegning, hvor nogle af fliserne nødvendigvis er usynlige. Vi laver et *stereografisk* billede af terningens overflade. Først anbringes terningen i en omskreven kugle, som den projiceres op på med udgangspunkt i centrum. Derpå projiceres det billede vi har fået på kuglen op på den tangentplan til kuglen som indeholder nordpolen,  $((0, 0, 1))$ . Denne sidste projektion har udgangspunkt i kuglens sydpol,  $((0, 0, -1))$ , som er det eneste punkt som ikke har en projektion.

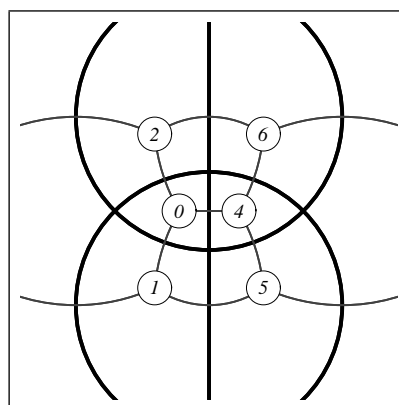
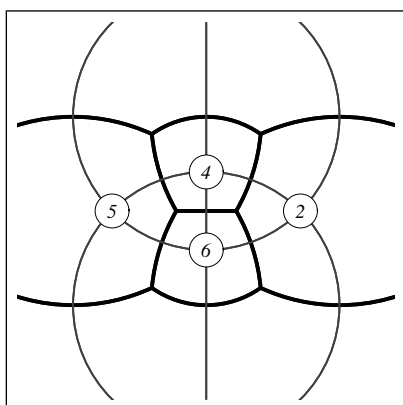
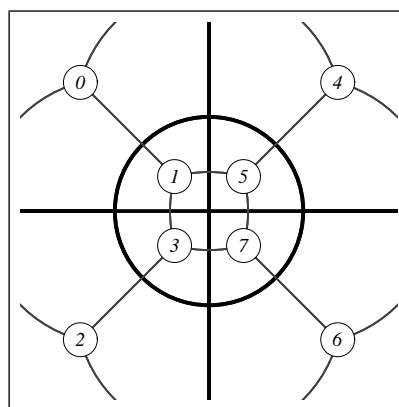
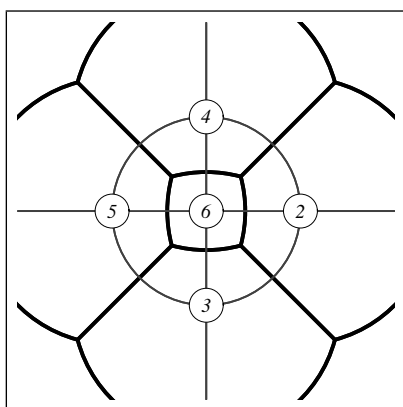
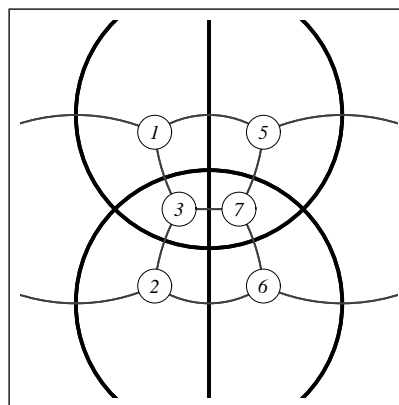
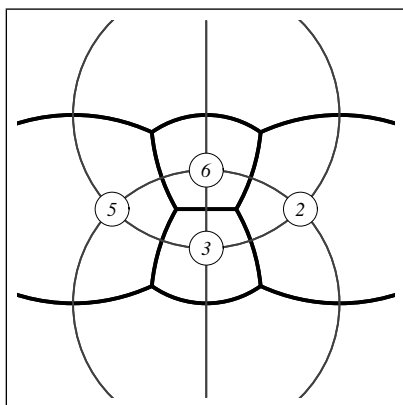
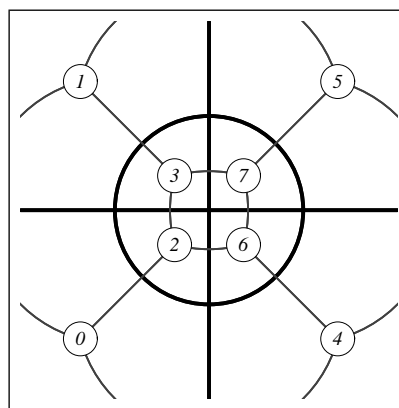
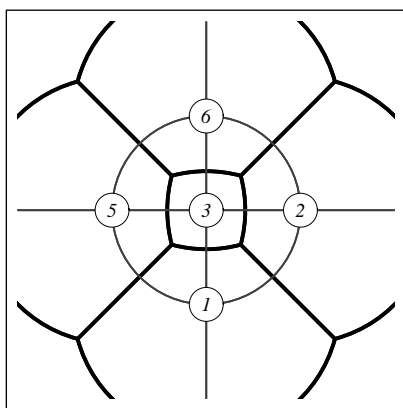


Figur 6. Terning i stereografisk projektion med fliselægning. De enkelte fliser er markeret med den drejning som skal anvendes for at få flisen frem ved drejning af referenceflisen, (som derfor er markeret med  $I$ )

Det der karakteriserer denne fliselægning er at de enkelte fliser ikke overlapper og at de tilsammen dækker hele overfladen. Næsten i hvert fald, idet ethvert punkt i hvert fald ligger på randen af en flise, rand her forstået i intuitiv forstand. Desuden er fliselægningen invariant i forhold til drejningsgruppen. Der er mange andre måder at lave denne type fliselægninger på ved passende valg af referenceflisen. F.eks. den der består af samtlige punkter der ligger på en bestemt side og tættest på et bestemt hjørne. Du kan jo give din egen beskrivelse af den tilsvarende fliselægning. Ø18 Benyt det plane billede af

fliselægningen til finde frem til omformningsregler for flytningsgruppen ved successivt at bruge andre drejninger end dem som er benyttet allerede på figuren. Vis f.eks. at  $XY$  og  $YZ$  gør det samme ved referenceflisen

*Figur 7. Figuren på næste side. Til venstre: En Fliselægning af terningen med kvadratiske fliser, set i stereografisk projektion med fire forskellige placeringer af projektionspunktet. Terningen selv med tyk streg. Til højre: Tilsvarende for et oktaeder*



## 6: Andre konfigurationer

---

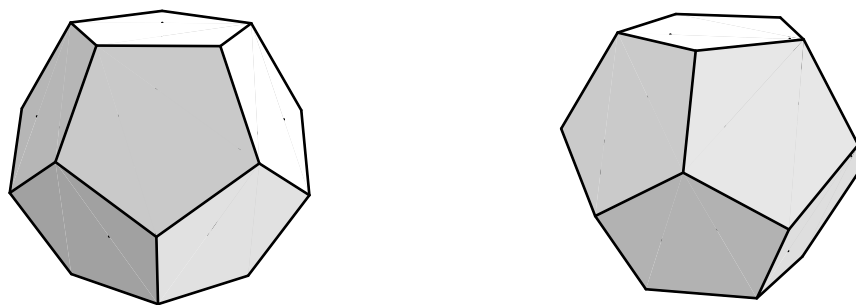
### 6.1: Konstruktioner

---

#### *Det regulære dodekaeder*

Indtil nu har vi set på konfigurationer som er forbundet med terningen. Vi vil nu se på hvordan metoderne kan anvendes på andre interessante konfigurationer.

Vi tager først et dodekaeder, det regulære polyeder, som har 12 sider (regulære femkanter), 30 kanter og 20 hjørner (hvor 3 flader mødes). På lignende måde som for terningen kan vi fastlægge at der er 60 forskellige placeringer, som hver kan realiseres ud fra udgangspositionen ved en serie af drejninger.



*Figur 8. Dodekaeder*

Der byder sig straks følgende drejninger til:

*sidebevarende*: aksens forbinder midtpunkterne på et par af diametralt modstående sider. Disse sider er invariante. For hvert par er der fire drejninger og der er 6 par. Dette giver 24 sidebevarende drejninger.

*kantbevarende*: aksens forbinder midtpunkterne på et par af diametralt modstående kanter. Disse kanter er invariante. For hvert par er der en drejning (på  $180^\circ$ ) og der er 15 par. Dette giver 15 kantbevarende drejninger.

*hjørnebevarende*: aksen forbinder to modstående hjørner, som er invariante. Der er to drejninger per par og der er 10 par hvilket giver 20 hjørnebevarende drejninger.

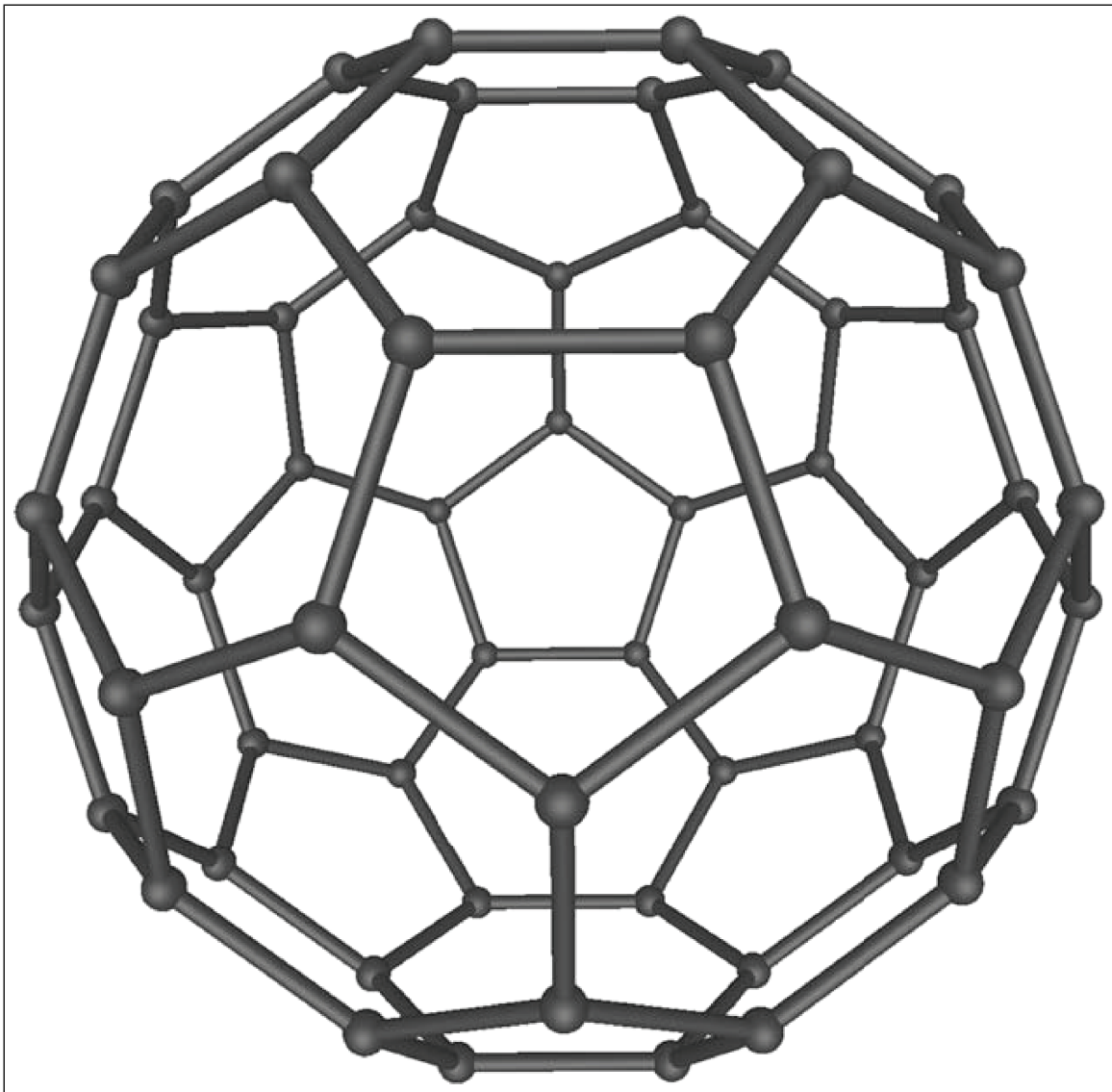
Med den identiske afbildning indregnet er vi derfor oppe på 60 drejninger, netop en for hver placering, så listen er fuldstændig.

*Og nu med fodbold. Det regulære ikosaeder mm*

Hvis vi (på passende måde) bruger sidemidtpunkterne i et regulært dodekaeder som hjørner fremkommer det regulære ikosaeder, som har 20 sider, som er ligesidede trekanter, og altså 12 hjørner. Ud fra denne konstruktion er det let at se at dodekaeder og ikosaeder har samme drejningsgruppe.

Hvis går frem på tilsvarende måde med et ikosaeder fremkommer igen et dodekaeder. Vi har nu to dodekaedre, et omskrevet om og et indskrevet i ikosaederet. Lader vi nu det omskrevne gradvist skrumpe til det når det indskrevne vil det gradvist skære større dele af ikosaederet. Den fremkaldte figur kaldes et trunkeret ikosaeder og det vil bestå af regulære femkanter som gradvist bliver større og (ikke nødvendigvis regulære) sekskanter som gradvist bliver mindre.

Men på et stadium vil sekskanterne være regulære og du står da med modellen for inddelingen af en moderne fodbold. Dens netværk fremkommer nemlig ved at projicere den fremkomne figur ud på kuglen fra midtpunktet. Denne figur har 60 hjørner. Anbringer man et kulstofatom i hver hjørne fremkommer et stabilt molekyle,  $C_{60}$ . Kemiske forbindelser af denne type kaldes Fullerener, opkaldt efter arkitekten Buckminster Fuller, som anvendte det trunkerede ikosaeder i (spektakulære) bygninger. Ø19



*Figur 9. Model af  $C_{60}$  molekylet*

#### *Frembringere for dodekaedergruppen*

Vi udvælger en af de sidebevarende drejninger på  $72^\circ$  og kalder den  $S$ . Vi vælger dernæst et par diametralt modstående kanter, en på hver af de to sider som bevares af  $S$ . Den drejning på  $180^\circ$  som bevarer disse kanter, kalder vi  $T$ , og den drejning på  $180$  grader som ombytter de to kanter, kalder vi  $U$ .

Vi vælger en af de to sider som bevares af  $S$  som en referenceside og forestiller os at det er en lagkage skåret i 5 stykker ved snit gennem hjørner. Vi vælger et af disse stykker ud som et referencestykke og vi ser at dette ved brug af  $S$  gentagne gange kan flyttes over i de andre stykker på referencesiden.

Bruger vi  $T$  på alle stykkerne i referencesiden fås alle stykkerne i den side som er naboside langs den bevarede kant.

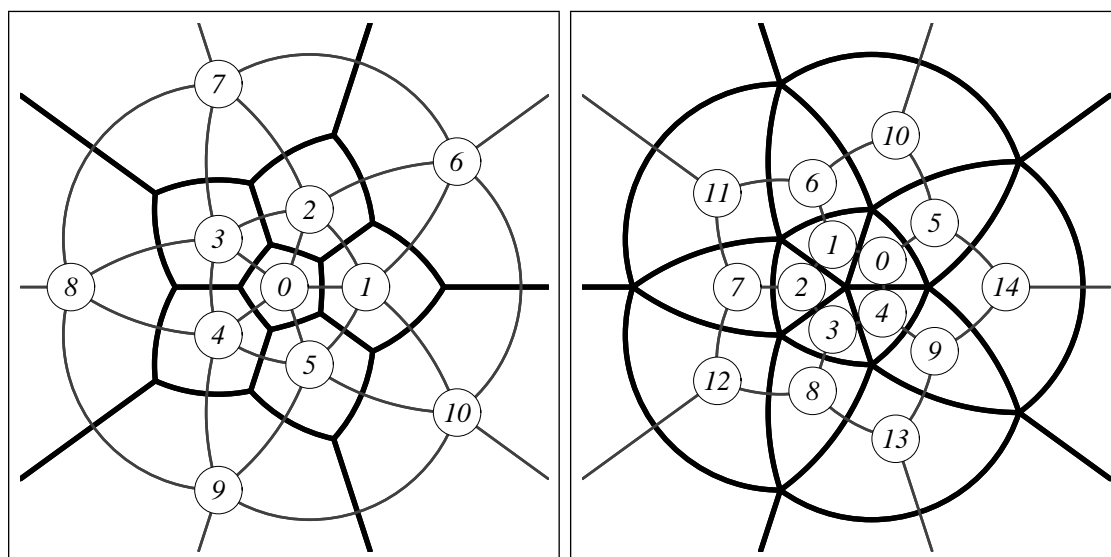
Bruger vi så  $S$  igen kan vi få flytter alle stykkerne på nabosiden over i samtlige stykker på de andre nabosider.

Vi kan altså ved gentagen brug af  $S$  og  $T$  få referencestykket flyttet over i samtlige stykker på referencesiden og dens fem nabosider. Disse 6 sider udgør halvdelen af dodekaederet.

Det overlades nu til den kære læser og flittige studerende at overbevise sig om at vi ved også at anvende  $U$  kan få alle lagkagestykker på alle sider dækket. Ø20

Dette kan bruges som argument for at enhver drejning i dodekaederets drejningsgrupper kan frembringes af  $S, T$  og  $U$ .

Det kan være en hjælp at benytte følgende figurer til at illustrere ovenstående. Husk at tage kopier, hvis du ønsker at overmale dem. E21



Figur 10. En stereografisk skitse af dodekaeder og ikosaeder.

## 7: Epilog

Vi startede med den struktur, der som objekter har alle rotationer i rummet og som operationer sammensætning og inversdannelse. Det blev nævnt at dette er en algebraisk struktur fordi den er lukket mht disse operationer. Men det blev ikke vist og heller ikke benyttet, men tværtimod fremhævet som et mål det kunne være værd at stræbe efter ved en anden lejlighed.



Ved at indskrænke mængden af objekter til kun at omfatte de drejninger, som fører terningen over i sig selv, men beholde operationerne, fik vi en struktur som er lukket over for disse operationer. Dette skete via et ad hoc argument som involverede en identifikation af mængden af drejninger.

Næste skridt bestod i at indskrænke den mængde som drejningerne virker på uden at give afkald på nogle af drejningerne. Hertil tjener mængden af hjørner. Derved er den enkelte drejning erstattet af en permutation af hjørnerne og sammensætningen af drejninger er erstattet af sammensætning af permutationer, og sammensætning af permutationer giver bekvemme kalkyler. Vi havde igen skiftet struktur, denne gang til Permutationer med sammensætning, som er en algebrask struktur.

Vi tog endnu et skridt ved at finde et (begrænset) sæt af rotationer, som frembringer hele rotationsgruppen for terningen. Derved kan der til enhver rotation knyttes et ord, som beskriver hvordan den er frembragt og sammensætninger af rotationer kan beskrives ved ordsammensætning. Vi har nu skiftet til en struktur hvor objekterne er ord og operationerne er ordsammensætning og en særlig ordinvertering. Al den geometriske information er blevet transformeret til nogle regler for hvordan ord kan omformes til ord med samme betydning. Vi kunne udføre alle kalkyler vedrørende rotationer ved at regne på ordene efter disse regler.

Hertil havde vi kun givet afkald på så meget information, at vi stadig havde helt styr på den oprindelige struktur. Man kan også studere de algebraiske konsekvenser af frivilligt at give afkald på mere information, således at man ikke længere kan skelne mellem alle rotationerne. Dette førte til inddeling af objekterne i klasser og til at overføre operationerne til at være operationer på disse klasser.

## 8: Eksempler og øvelser

---

### *Eksempel 1: Drejningsvinkel*

Den drejning, som har  $z$ -aksen som drejningsakse og fører  $x$ -aksen over i  $y$ -aksen, har drejningsvinkel  $90^\circ$ , når drejningsaksen har samme orientering som  $z$ -aksen

---

### *Eksempel 2: Drejningsvinkel*

Bestem drejningsvinklen for den drejning, som har  $y$ -aksen som drejningsakse og fører  $x$ -aksen over i  $z$ -aksen, når drejningsaksen har samme orientering som  $y$ -aksen

---

### *Øvelse 3: Detaljer argumentet*

Udfyld detaljerne i argumentet for at en drejning er bestemt af placeringen

---

### *Øvelse 4: Angivelse af drejning vha placeringer*

Giv en nummerering af siderne i udgangspositionen og angiv placeringen af de udvalgte sider efter en drejning på  $180^\circ$  om  $x$ -aksen

---

### *Øvelse 5: Drejningsgruppen for det regulære oktaeder (1)*

Det regulære oktaeder har otte sider som er ens ligesidede trekanter. Find de bevarende afbildninger på samme måde som vi anvendte for terningen

---

### *Øvelse 6: Drejningsgruppen for det regulære oktaeder (2)*

Find drejningsgruppen ved at relatere oktaederet til terningen

---

### *Øvelse 7: Andre konfigurationer*

I hver af de følgende øvelser Ø8, Ø9, Ø10, Ø11 er der specificeret en konfiguration og en type afbildninger. Øvelsen består i at finde de afbildninger af den specificerede type som bevarer konfigurationen vha en geometrisk beskrivelse som drejningsakse eller spejlingsplan. Der er også en øvelse i at beskrive afbildningerne som permutationer

---

### *Øvelse 8: Trekantbevarende drejninger i planen*

Ligesidet trekant, drejninger. Se den generelle opgaveformulering ovenfor Ø7

---

### *Øvelse 9: Trekantbevarende drejninger og spejlinger i planen*

Ligesidet trekant, drejninger og spejlinger. Se den generelle opgaveformulering ovenfor Ø7

---

### *Øvelse 10: Trekantbevarende drejninger i rummet*

Ligesidet trekant, drejninger i rummet. Se den generelle opgaveformulering ovenfor Ø7

---

---

*Øvelse 11: Oktaederbevarende drejninger*

Regulært oktaeder, drejninger. Se den generelle opgaveformulering ovenfor Ø7. Et regulært oktaeder er det legeme som har otte sider som alle er ligesidede trekanter. Lav en liste over drejninger som bevarer et oktaeder

---

*Øvelse 12: Midtpunktsbevarende drejninger*

Betragt de 6 centre af siderne. Vis at disse udgør hjørnerne i et regulært oktaeder

---

*Øvelse 13: Terningbevarende spejlinger*

Bestem alle spejlinger som bevarer et givet regulært tetraeder

---

*Øvelse 14: Udfyld detaljerne!*

Udfyld detaljerne i argumentet for at enhver drejning (som bevarer terningen) kan frembringes af de tre drejninger om akserne.

---

*Eksempel 15:  $XY = YZ$*

Ligningen  $XY = YZ$  er ensbetydende med  $Z = \bar{Y}XY$ , og hvis man kender til hvad det sker når man skifter koordinatsystem, så har denne formel den simple geometriske forklaring, at hvis der laves et nyt koordinatsystemet ved at dreje det gamle med  $Y$ , så vil  $Z$  i det gamle system svare til  $X$  i det nye system og overgang fra gamle til nye koordinater kan foretages ved at benytte  $Y$

---

*Øvelse 16: Forkort ordet*

Forkort ordene  $XYZX$ ,  $\bar{X}Y\bar{Z}XY$

---

*Øvelse 17: Frembringning af tetraedergruppen*

Se nærmere på påstanden om at tetraedergruppen er frembragt af  $XY$  og  $XX$

---

*Øvelse 18: Gør det så!*

Giv en lidt skarpere definition af den foreslåede referenceflise, og gør rede for hele fliselægningen

---

*Øvelse 19: Fullerene*

Bestem drejningsgruppen for  $C_{60}$

---

*Øvelse 20:  $S, T, U$  frembringer drejningsgruppen for tetraederet*

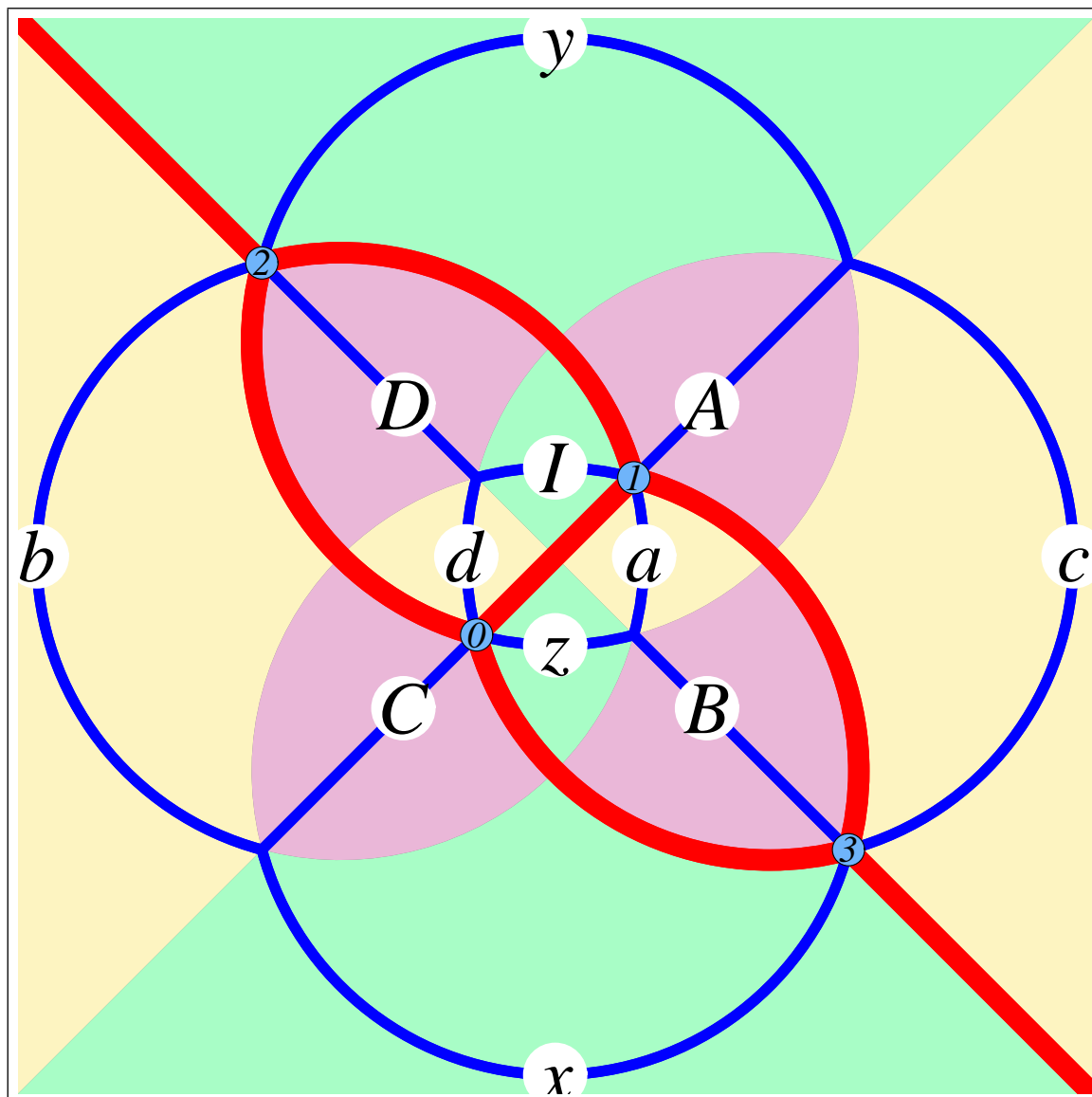
Ja, vis det!

---

*Eksempel 21: Tetraederets drejningsgruppe*

I en tetraeder benævnes hjørnerne  $A, B, C, D$  og drejningen om  $A$  på  $120^\circ$  om en akse gennem og orienteret mod  $A$  kaldes også  $A$ , mens dens inverse kaldes  $a$ . Tilsvarende indføres drejningerne  $B, b, C, c, D, d$ . Drejningerne på  $180$  kaldes  $x, y, z$ , da deres akser kan bruges som koordinatsystem.

På Figur 10 er gruppen illustreret med en fliselægning.



Figur 10. En Fliselægning af tetraederet. Referenceflisen er markeret med  $I$ . Se teksten for nærmere forklaring

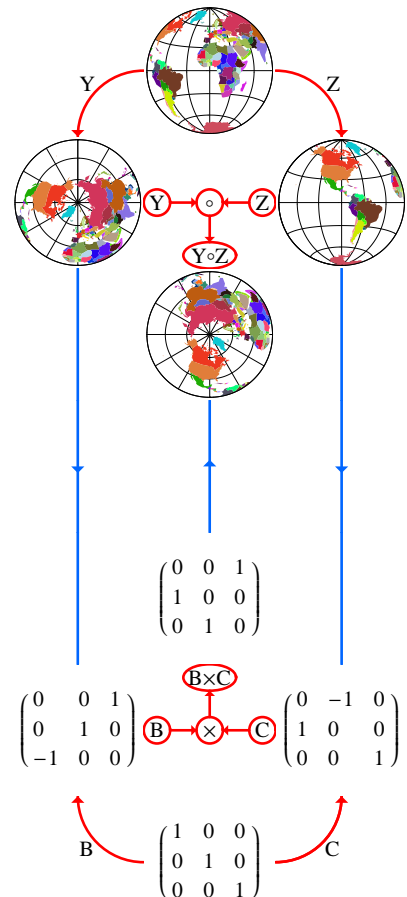
## 9: Stikordsregister

---

- algebraisering, 8
- betydning, 12
- bevarer, 5
- drejningsgruppe, 5
- farvet, 16
- farvevirkning, 17
- farveækvivalente, 16
- fixpunkt, 10
- flise, 19
- fliselægning, 19
- frembragt, 11
- gruppe, 5
- hjørnebevarende, 6
- hjørnevirkning, 10
- invariant, 5
- kantbevarende, 6
- konkatenering, 11
- kortform, 11
- krystaller, 5
- oktaeder, 29
- ord, 11
- orden, 12
- ordomskrivningsregler, 12
- ordproblem, 16
- referenceflise, 20
- sidebevarende, 6
- stereografisk, 20
- tetraeder, 14
- Tetraederbevarende, 14
- tetraederækvivalente, 15
- tomme ord, 11
- udgangsposition, 8
- virkningsløse, 16

Anders Madsen

# DREJNING SOM MATRIX



KONKRETE  
ALGEBRAISKE  
STRUKTURER

2

Dette er et hæfte i en serie med titlen ”Konkrete algebraiske strukturer”, som jeg har skrevet til algebrakurset (E1) på matematikuddannelsen ved IMFUFA på RUC.

Hæfterne skal ses i sammenhæng med en anden serie hæfter med titlen ”Abstrakte algebraiske strukturer”. Disse to serier udgør hver sin kæbe i en knibtang.

Naturligvis ville det være tomt (og frustrerende) at undervise i abstrakt algebra uden inddragelse af konkrete eksempler og det ville være fattigt (og perspektivforladt) kun at gennemgå konkrete eksempler uden at inddrage de underliggende abstrakte strukturer.

På den anden side er der en vis skønhed i at fremhæve den abstrakte karakter ved at isolere den og lade dens top-down karakter fremstå tydeligt som i det forkætrede forbillede ”Matematikens elementer” af Bourbaki. Starte med de groveste strukturer og efterhånden tilføje finere strukturelementer. Alle resultater, som går igen og igen, formuleres og bevises en gang for alle.

Ligeledes er der en tilfredsstillelse forbundet med at lade de enkelte konkrete strukturer stå så enkelt som muligt, uden overflødige dikkedarer, *das Ding an sich*. Og der er fornøjelsen ved at se det essentielt samme argument komme igen og igen i forskellige forklædninger.

Udover den æstetiske tilfredsstillelse ved den rene abstraktion og den rene fornøjelse ved de konkrete detaljer har begge disse perspektiver en stor erkendelsesmæssig betydning og bidrager til udviklingen af kompetencer som er væsentlige for matematikere.

Jeg har valgt at fremhæve de to modsatrettede men samspillende perspektiver ved den opdeling som de to serier repræsenterer. De enkelte konkrete strukturer er fremstillet i enkeltstående fremstillinger uden indbyrdes referencer. Stof som forudsættes flere steder er medtaget hvert sted. Men udvalget af detaljer er foretaget på en sådan måde at det bedst muligt kan levere stof til den abstrakte del.

Den matematiske kerne for de enkelte hæfter, uden forbindende tekst og illustrationer, har foreligget tidligere i mere rå form beregnet på uddybning ved forelæsning og ikke egnet til selvstudium, ikke mindst på grund af utallige trykfejl og tanketorsk, som de studerende med stor tålmodighed har fanget. Dette skylder jeg dem tak for og derfor er hæfterne tilegnet alle tidligere og nuværende studerende på E1, som jeg takker for deres medvirken.

Hæfterne findes i netudgaver med alle referencer som aktive links og med opdateringer:

<http://milne.ruc.dk/~am/algebra>

Anders Madsen, november 2006

# Indholdsfortegnelse

1	Prolog	
2	Drejninger i planen.	
1	Forberedelser og terminologi.	5
2	Koordinatsystem og matricer.	6
3	Ortogonale matricer.	8
3	Drejninger i rummet.	
1	Koordinatsystemer og matricer.	9
2	Ortogonale matricer.	15
4	Epilog	
5	Stikordsregister	



# 1: Prolog

---

I dette hæfte skal du møde forskellige konkrete eksempler på algebraiske strukturer. Vi taler om en algebraisk struktur, når vi har en bestemt type objekter og en eller flere operationer på denne type objekter, der fører til et objekt af samme type, samt nogle regneregler for disse operationer.

Det mest oplagte eksempel har som objekter de reelle tal, som operationer de sædvanlige aritmetiske operationer med de sædvanlige regneregler.

Vi skal møde to algebraiske strukturer, som er væsensforskellige, men alligevel ud fra et vist synspunkt ens.

I den ene algebraiske struktur er objekterne drejninger af rummet, med den ene begrænsning at deres akser alle har et punkt fælles, hvilket også betyder at de fører enhver kugle med centrum i dette punkt over i sig selv. Operationen er sædvanlig sammensætning af afbildninger. Det er, når vi starter, ikke klart at der overhovedet er tale om en algebraiske struktur idet vi ikke ved om sammensætning af drejninger fører til en drejning. Og vi ved det først når vi når slutningen.

I den anden algebraiske struktur er objekterne matricer, men kun visse specielle matricer, de såkaldte specielle ortogonale matricer, som vi definerer rent algebraisk, men med geometrisk inspiration. Den algebraiske operation er multiplikation af matricer.

Forbindelsen mellem disse strukturer er den som eksisterer mellem en lineær afbildning (som en drejning) og dens matrix. Vi viser at drejningerne netop er de afbildninger hvis matricer er specielle ortogonale. Vi ved så fra den generelle teori for lineære afbildninger at sammensætning korresponderer med multiplikation og at invers afbildning korresponderer med invers matrix.

Dernæst viser vi at de specielle ortogonale matricer er lukket mht. multiplikation og dannelsen af invers matrix og derfor udgør en algebraisk struktur.

Via korrespondancen mellem drejninger og matricer ser vi så at drejningerne også er en algebraisk struktur. Vi kan altså slutte af med (en del af) svaret på det brændende spørgsmål: hvad sker der når man sammensætter to drejninger?.

Vi kommer til at se nogle vigtige forhold, som vil kunne tjene som eksempler inden for den såkaldte *gruppeteori*, hvilket da også er et selvstændigt formål med hæftet, men fremstillingen som sådan forudsætter ikke gruppeteori.

Vi går ikke ind i det egentlige geometriske grundlag, men tager udgangspunkt i en algebraisering af så få geometriske forhold som muligt. Vi formulerer dette nærmest som en slags aksiomer af den form, at visse geometriske begreber og lovmæssigheder eksisterer og har dette eller hint algebraiske sidestykke. Det er derfor muligt på et andet tidspunkt at bringe forbindelsen fra den geometriske "virkelighed" til den algebraiske "model" i orden.

Men, når første akt åbner er det med drejninger af planen i rollerne. Der vil være en opsamling med tydeliggørelse af den røde tråd i epilogen.

## 2: Drejninger i planen.

---

### 2.1: Forberedelser og terminologi.

---

*Vi bygger på intuitionen.*

Vi vil ikke definere hvad der forstås ved en drejning, men basere fremstillingen på vores intuition. Intuitivt fremkommer en drejning ved at en ny udgave af planen placeres over den gamle, fæstnes i et enkelt punkt, omdrejningspunktet, og den nye plan bevæges nu uden at vrides eller strækkes og uden at forlade underlaget, tænk for eksempel på en stiv skive på et plant underlag fæstnet med en enkelt stift, hvormed skiven kan drejes.

*En drejning bevarer geometrien.*

Har vi nu i udgangspositionen tegnet en geometrisk konfiguration, fx en trekant, på underlaget og gentaget den på skiven som vi kan forestille os gennemsigtig, da vil konfigurationen på skiven efter drejningen være kongruent med konfigurationen på underlaget, hvilket betyder at korresponderende afstande og vinkler vil være ens. Det samme gælder orientering. Hvis fx den korteste drejning om en vinkelspids som fører en side af en trekant over i en anden er med uret, da vil den samme relation være opfyldt mellem de tilsvarende komponenter i den drejede trekant. Lad os kort (og upræcist) sige at geometrien *bevares* ved drejning.

*En drejning opfattes som en afbildning.*

Vi vil tænke på drejningen som slutresultatet af en bevægelse, ikke som bevægelsen selv. Derfor kan den opfattes som en afbildning af planen ind i sig selv, nemlig den afbildning som til et givet punkt i underlaget knytter det punkt i underlaget, som efter drejningen ligger under det punkt på skiven, som oprindeligt lå over det givne punkt.

### *Drejningsvinkel.*

Vi tænker os nu et fast punkt  $E$  med afstanden 1 til omdrejningspunktet og betegner med  $E'$  dets billedpunkt ved en hvis given drejning. Hvis vi kan komme fra  $E$  til  $E'$  ved at dreje planen uden at skifte retning på en sådan måde, at vi har tilbagelagt vejlængden  $u$  da siger vi at  $u$  er en *drejningsvinkel* for den givne drejning. Vi regner vejlængden for positiv, hvis vi hele tiden har drejet mod uret og negativ hvis vi har drejet med uret. En drejning kan således have mange drejningsvinkler, men de vil indbyrdes have en forskel som er et helt tal gange cirkelns omkreds. Vi ser at hvis en drejning har  $u$ , en anden  $v$  som en drejningsvinkel, da vil  $u + v$  være en drejningsvinkel for den drejning, som fremkommer ved at lade den ene følge efter den anden.

Dermed har vi afsluttet vores rent geometriske forberedelser, og vi går videre til at præsentere de vigtigste værktøjer:

## 2.2: Koordinatsystem og matricer.

---

### *Drejninger udtrykt i koordinater.*

Vi tænker os nu et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i planen, hvilket indebærer at  $y$ -aksen fremkommer af  $x$ -aksen ved en drejning med drejningsvinklen  $\pi/2$ . En drejning vil da kunne udtrykkes ved at den sender et koordinatsæt  $(x, y)$  over i et andet koordinatsæt  $(x', y')$ , altså en afbildning af  $\mathbb{R}^2$  ind i sig selv. Det kan vises ved anvendelse af bemærkningen ovenfor om bevarelse af geometrien at denne afbildning må være lineær, hvilket vi ikke vil gå nærmere ind på at begrunde her, selvom vi kommer til at benytte det kraftigt.

Om de *trigonometriske funktioner*  $\sin$  og  $\cos$  behøver vi kun at vide at  $(\cos t, \sin t)$  er koordinatsættet for det punkt, som fremkommer af punktet med koordinatsættet  $(1, 0)$  ved en drejning med drejningsvinklen  $t$ .

### *Sammenfatning af antagelserne.*

Vi sammenfatter vores intuitive antagelser og den algebraiske repræsentation af dem i følgende sætning, som vi altså hverken præciserer eller beviser, men snarere tager som et slags aksiom med begreberne drejning og drejningsvinkel som udefinerede (såkaldte indefinable):

## 1. Sætning: Fundamentale antagelser om drejninger

---

Til ethvert  $u \in \mathbb{R}$  findes en drejning om begyndelsespunktet, som har  $u$  som drejningsvinkel. Vi lader  $D_u$  være betegnelse for den tilsvarende afbildning udtrykt i koordinater. Vi har da

1) *Linearitet:*  $D_u$  er lineær.

2) *Ortogonalitet:*

$$D_u(1, 0) = (\cos u, \sin u)$$

$$D_{\frac{\pi}{2}}(1, 0) = (0, 1)$$

$$D_{\frac{\pi}{2}}(0, 1) = (-1, 0)$$

3) *Additivitet:*

$$D_u \circ D_v = D_{u+v},$$

4) *Kontinuitet:* Til to givne linjer gennem begyndelsespunktet findes en drejning om begyndelsespunktet der fører den første over i den anden.

(De valgte etiketter for egenskaberne forklares ikke nærmere da de kun benyttes af hensyn til muligheden for reference og lidt suggestiv virkning.)

---

En formel for drejningsmatricer.

Vi vil ud fra disse antagelser udlede en formel for *drejningsmatricer* og lader  $A_u$  betegne matricen for  $D_u$ . Additivitetsbetingelsen (3) kan da udtrykkes ved at

$$A_u A_v = A_{u+v}.$$

Vi minder om at søjlerne i matricen for en lineær afbildning er koordinatsættene for billederne af basisvektorerne,  $(1, 0)$  og  $(0, 1)$ . Heraf ser vi straks at

$$A_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hvoraf det videre ses at

$$D_u(0, 1) = D_u(D_{\frac{\pi}{2}}(1, 0)) = D_{\frac{\pi}{2}}(D_u(1, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \end{pmatrix}$$

og dermed har vi fundet formelen, som vi sammenfatter i følgende sætning:

## 2. Sætning: Matricen for en drejning.

---

Matricen for  $D_u$  er givet ved formelen

$$A_u = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}$$

---

## 2.3: Ortogonale matricer.

---

*En fundamental egenskab for drejningsmatricer.*

Vi vil nu behandle en meget vigtig egenskab ved drejningsmatricer. Af additivitetsligningen  $A_u A_v = A_{u+v}$  får vi ved at sætte  $v = -u$  at  $A_u A_{-u} = A_0 = E$  og har altså at  $A_u^{-1} = A_{-u}$ . Vi ser ved udregning at  $A_{-u} = A_u^\top$  og har altså at  $A_u^{-1} = A_u^\top$ .

En matrix  $A$  for hvilken  $A^\top = A^{-1}$ , hvilket er ensbetydende med at  $AA^\top = A^\top A = E$ , kaldes ortogonal. Det ses nemlig nemt at dette er ensbetydende med at dens søjler er enhedsvektorer og indbyrdes ortogonale. En drejningsmatrix er altså ortogonal.

---

### 3. Definition: Orthogonal matrix.

---

*Matricen  $A$  kaldes ortogonal hvis  $AA^\top = A^\top A = E$*

---

Ved udregning ses det endvidere at  $\det A_u = \cos^2 u + \sin^2 u = 1 > 0$ . En matrix med positiv determinant kaldes orienteringsbevarende, det kan nemlig vises at dette er ensbetydende med at billederne af to vektorer har samme orientering som vektorerne selv. Vi sammenfatter det udledte i et par definitioner og en sætning:

---

### 4. Definition: Orienteringsbevarende matrix

---

*Matricen  $A$  kaldes orienteringsbevarende hvis  $\det A > 0$*

---

### 5. Sætning: En drejningsmatrix er ortogonal og orienteringsbevarende

---

*En drejningsmatrix er ortogonal og orienteringsbevarende*

---

En grund til at fremhæve disse to egenskaber ved drejningsmatricer er at de karakteriserer dem, som det fremgår af følgende sætning:

**6. Sætning: En matrix som er både ortogonal og orienteringsbevarende er en drejningsmatrix.**

---

Lad

$$A = \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}$$

være en orienteringsbevarende ortogonal matrix. Da eksisterer der  $u \in \mathbb{R}$  således at  $A = A_u$ . Som  $u$  kan benyttes enhver løsning til ligningssystemet  $\cos u = a$  og  $\sin u = b$

---

Bevis : Ved udregning ses at

$$A^T A = \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ax + by \\ ax + by & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Vi har altså at ortogonalitetskravet medfører ligningssystemet

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 & ax + by &= 0 \\ ax + by &= 0 & x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Af ligningen  $a^2 + b^2 = 1$  følger det klart at vi kan finde en løsning  $u$  til ligningerne  $\cos u = a$  og  $\sin u = b$ . Lad nu  $u$  være en vilkårlig sådan løsning.

Ved brug af simpel lineær algebra udleder vi af ligningen  $ax + by = 0$  at der må findes  $t \in \mathbb{R}$  således at  $(x, y) = t(-b, a)$ .

Orienteringsbevarelsen giver at  $\det A = ay - bx > 0$ , der ved indsættelse af det fundne udtryk for  $(x, y)$  giver at  $t(a^2 + b^2) > 0$  og dermed at  $t > 0$ .

Ved tilsvarende indsættelse i ligningen  $x^2 + y^2 = 1$  fås at  $t^2(a^2 + b^2) = 1$ , der videre giver at  $t^2 = 1$ . Af de to betingelser vi nu har på  $t$  fås da at  $t = 1$  og dermed at  $(x, y) = (-b, a)$ . Heraf ses at  $A = A_u$ . Dermed har vi altså fundet en måde hvorpå vi nemt kan afgøre om en given  $2 \times 2$  matrix er en drejningsmatrix. Ø3

Så nu er vi klar til at tage fat på det 3-dimensionale rum:

## 3: Drejninger i rummet.

---

### 3.1: Koordinatsystemer og matricer.

---

*Drejninger i rummet.*

Vi går nu over til drejninger af rummet og kaster os direkte ud i at sammenfatte vores intuitive opfattelse i følgende aksiom:

## **7. Sætning: Antagelser om drejninger i rummet**

---

*For enhver linje  $a$  gennem begyndelsespunktet og ethvert  $u \in \mathbb{R}$  findes en drejning med drejningsvinkel  $u$  og drejningsakse  $a$ . Den tilsvarende afbildning udtrykt i koordinater benævner vi  $D_u^a$ .*

- 1) *Linearitet:  $D_u^a$  er lineær.*
- 2) *Drejningsakse: For enhver vektor  $x$ , som er koordinatsæt for et punkt på  $a$ , gælder at  $D_u^a(x) = x$ .*
- 3) *Drejningsplaner: Enhver plan  $P$  vinkelret på  $a$  overføres i sig selv ved drejningen. Lad der være givet et sædvanligt koordinatsystem, som har sin tredje akse liggende på  $a$ . Restriktionen af drejningen til  $P$  vil da i det koordinatsystem som består af de to første akser i det nye system være udtrykt ved  $D_u$ . Enhver drejning i denne plan fremkommer på denne måde og kan altså udvides til en drejning i rummet med planens normal som akse.*
- 4) *Drejning af koordinatsystemet: Lad et koordinatsystem (det nye) fremkomme af et andet (det gamle) ved en drejning. Lad  $P$  være et punkt og lad  $Q$  være billedet af  $P$  ved drejningen. Da vil det nye koordinatsæt for  $Q$  være det samme som det gamle koordinatsæt for  $P$ .*

---

For en ordens skyld skal det nævnes at vi opfatter det som en selvfølgelighed, at følgende gælder:

*Lad  $x$  og  $y$  være koordinatsæt for to punkter  $P$  og  $Q$  som bestemmer linjerne  $l$  og  $m$  gennem begyndelsespunktet. Disse linjer står vinkelret på hinanden, netop hvis  $x$  og  $y$  er indbyrdes ortogonale, hvilket (per definition) betyder at  $x \cdot y = 0$ .*

Vi går nu efter en formel for drejningsmatricen. I første omgang nøjes vi med at gøre dette i forhold til et særlig simpelt koordinatsystem:

## **8. Sætning: En formel for matricen for en drejning.**

---

*Matricen for  $D_u^a$  i et koordinatsystem, hvis  $z$ -akse ligger på  $a$  har formen*

$$\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

*Bevis : Af betingelsen for drejningsaksen følger det at billedet af  $(0,0,1)$  er  $(0,0,1)$ . Dette begrundes den sidste søjle i matricen.*

*Punktet  $(1,0,0)$  ligger i drejningsplanen gennem begyndelsespunktet og har i det tilsvarende plane koordinatsystem koordinatsættet  $(1,0)$ , som ved den plane drejning føres over i  $(\cos u, \sin u)$ , der i det rumlige koordinatsystem har koordinatsættet  $(\cos u, \sin u, 0)$ . Dette begrundes den første søjle. Helt analogt begrundes anden søjle. Ø4*

Vi sigter nu mod at kunne betstemme drejningsmatricen i forhold til et vilkårligt koordinatsystem. Dette vil vi gøre ved at dreje det koordinatsystem der er givet over i et, som er af den type vi allerede har klaret. Vi får altså brug for at kunne skifte mellem to koordinatsystemer. Dette er et teknisk problem som klares i de næste par sætninger.

## **9. Sætning: Koordinatskifte ved drejning af koordinatsystem.**

---

*Hvis et nyt koordinatsystem fremkommer ved drejning af et gammelt om begyndelsespunktet, da fremkommer de gamle koordinater af de nye ved den afbildning som udtrykker den givne drejning i koordinater.*

*Hvis  $A$  er drejningsmatricen i gamle koordinater da gælder det at  $u = Av$  hvor  $u$  og  $v$  er henholdsvis gamle og nye koordinater for samme punkt.*

---

*Bevis : Lad  $Q$  være et punkt hvis nye koordinatsæt er  $v$ . Vi ønsker at finde det gamle koordinatsæt,  $u$  for  $Q$ . Lad nu  $P$  være det punkt, som ved drejningen føres over i  $Q$ . Ved at bruge vores antagelse om drejning af koordinatsystemer (S7) slutter vi at  $v$  er det gamle koordinatsæt for  $P$ . Da  $D$  udtrykker drejningen i forhold til det gamle koordinatsystem slutter vi heraf at  $D(v)$  er det gamle koordinatsæt for  $Q$  (D10), altså  $u = D(v) = Av$ , og det var jo hvad vi ønskede at konstatere.*

Nu ved vi hvordan vi skifter mellem gamle og nye koordinater, hvis vi skifter koordinatsystem ved en drejning.

En afbildning af rummet ind i sig selv vil kunne udtrykkes i hvert sit af de to koordinatsystemer. Vi vil gerne være i stand til at finde det andet af disse udtryk ud fra kendskab til det ene. Da vi også kommer til at beskæftige os med afbildninger, som ikke nødvendigvis er drejninger, formulerer vi resultatet helt generelt.



---

## 10. Definition: Afbildning udtrykt i koordinater.

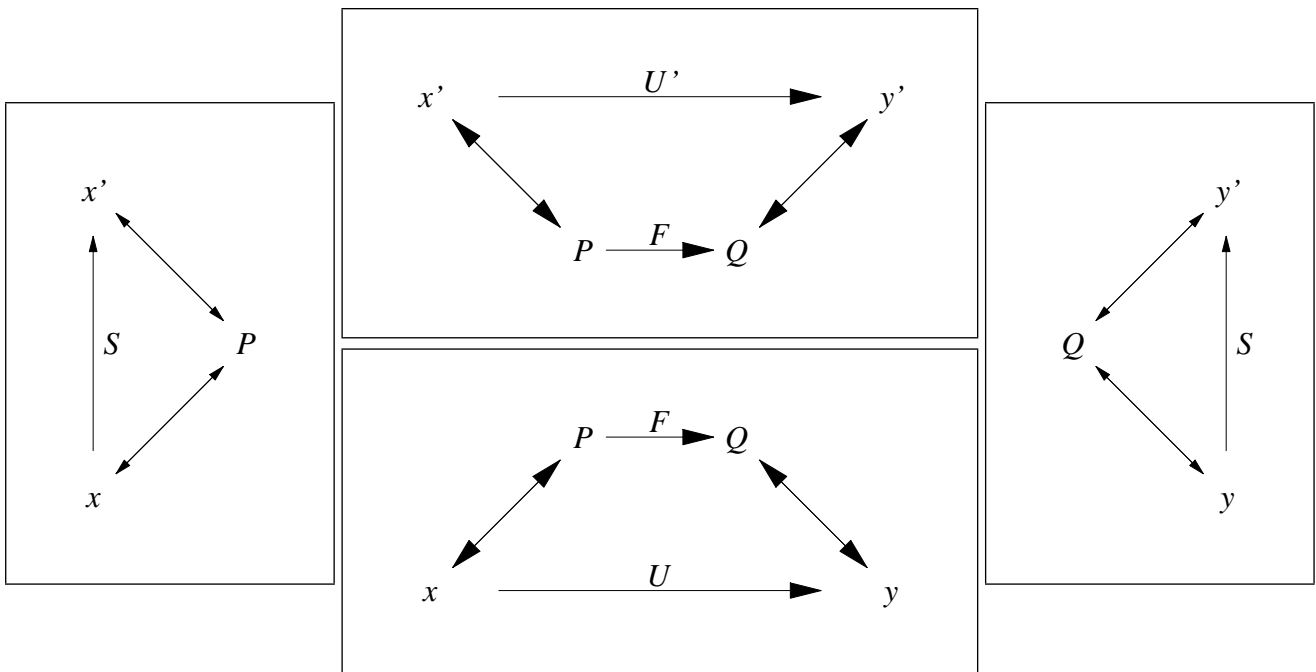
---

Lad  $F$  være en afbildning af rummet ind i sig selv og lad  $U$  være en afbildning af  $\mathbb{R}^3$  ind i sig selv. Antag at  $Q = F(P)$ , og at  $x$  koordinatsæt for  $P$  og  $y$  koordinatsæt for  $Q$ .

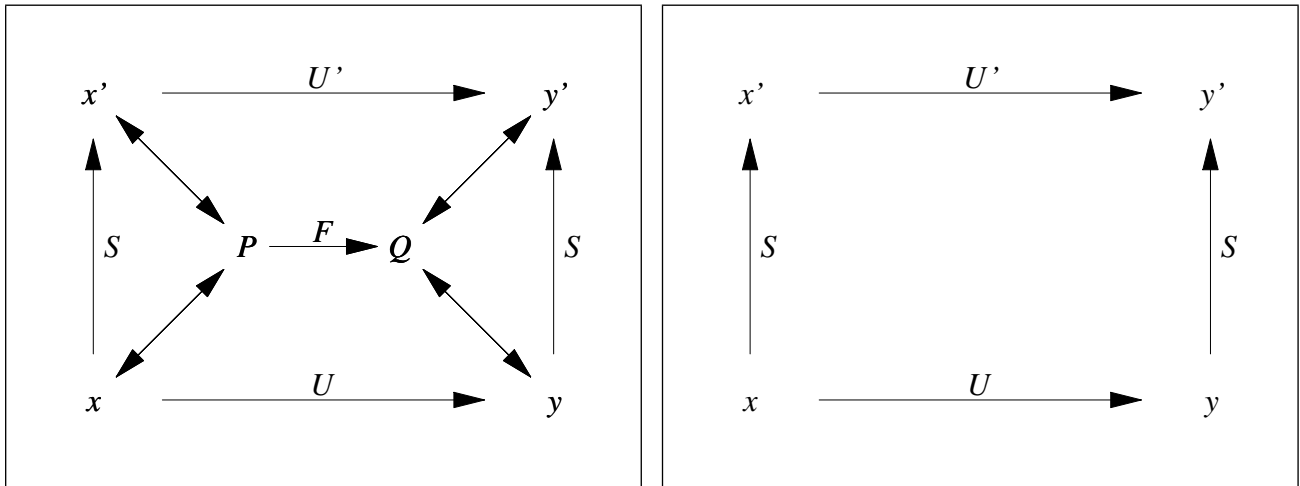
Vi siger at  $U$  er udtryk for  $F$ , hvis  $y = U(x)$  for alle  $P, Q, x$  og  $y$  som opfylder betingelserne.

---

Denne definition er udtrykt i den nederste ramme i midten i følgende tegneserie af diagrammer; se også diagramteksten.



Tabel 1. De to trekantede diagrammer sammenfatter sammenhængen mellem koordinatskifteafbildningen  $S$  og koordinatafbildningerne. Dobbeltpilene er sammenhængen mellem et punkt og dets koordinatsæt i forskellige koordinatsystemer. De trapezformede diagrammer sammenfatter sammenhængen mellem en afbildning af rummet ind i sig selv og afbildningens udtryk i koordinater vha koordinatafbildningerne. Alle fire diagrammer er kommutative. Dermed menes at hvis vi opfatter hver pil som en lovlig vej så vil to ture som starter samme sted, følger lovlige veje og slutter samme sted angive to måder at sammensætte operationer på, som giver samme resultat. De lodrette pile angiver sammenhængen mellem et punkt og dets koordinatsæt.



Tabel 2. Diagrammet til venstre fremkommer ved kombination af de fire diagrammer i Tabel 1. Det fremkomne diagram er kommutativt. Diagrammet til højre fremkommer af det første ved udeladelse af visse pile. Dette er også kommutativt og indeholder dermed resultatet om koordinatskifte.

### 11. Sætning: Koordinatskifte for en drejning.

Antag at der er givet et nyt koordinatsystem og et gammelt koordinatsystem med fælles begyndelsespunktet, og at overgangen fra gamle til nye koordinater er givet ved en afbildning  $S$ .

Antag at en der derudover er givet en afbildning  $F$ , som i de gamle koordinater udtrykkes ved  $U$  og i de nye ved  $U'$  da gælder følgende tre relationer mellem  $U$  og  $U'$ :

$$S \circ U = U' \circ S, \quad U = S^{-1} \circ U' \circ S, \quad U' = S \circ U \circ S^{-1}$$

*Bevis :* Det ses ved sædvanlig regning med afbildninger at de tre betingelser er ensbetydende, så det er nok at eftervise den første. Lad  $v$  være givet og lad  $P$  være det punkt, som har  $v$  som sit gamle koordinatsæt, og sæt  $Q = F(P)$ .

Lad os se hvad venstresiden giver anvendt på  $v$ . Vi ser at  $U(v)$  per definition er det gamle koordinatsæt for  $Q$  og følgelig at  $S(U(v))$  er det nye koordinatsæt for  $Q$ .

Lad os dernæst se på højresidens virkning:  $S(v)$  er det nye koordinatsæt for  $P$  og  $U'(S(v))$  derfor det nye koordinatsæt for  $Q$  ifølge S9. Vi får altså det samme på de to sider af lighedstegnet.

De to øvrige ligninger kan også nemt fortolkes direkte. Prøv!

*Beviset kan også aflæses direkte af Tabel 1*

Vi ved nu hvordan vi forbinder udtrykkene for en drejning svarene til forskellige koordinatsystemer. Dette vil vi gerne oversætte til matrix algebra. Men for at kunne bruge matricer, må der være tale om lineære afbildninger. Det gælder faktisk at enhver koordinatskifte afbildning er lineær, men da det ikke er intuitivt helt så indlysende som vore andre grundantagelser vælger vi her at give et bevis. Men det kan du jo så også afhængigt af dit temperament og tidligere erfaringer springe over.

Vi ved at drejninger er lineære (det er en af vores grundantagelser). Det gør følgende sætning nyttig:

## **12. Sætning: Nye koordinatsystemer kan fås fra gamle vha drejninger.**

*Ethvert sædvanligt koordinatsystem kan fås ved to på hinanden følgende drejninger af ethvert andet koordinatsystem med samme begyndelsespunkt.*

---

*Bevis : Vi kalder det ene system det gamle og det andet det nye. De to x-akser ligger i en fælles plan og der eksisterer i henhold til vores grundlæggende antagelser (S1,4) en drejning af denne plan, som fører den gamle over i den nye. Denne kan også med henvisning til de grundlæggende antagelser udvides til en drejning af hele rummet (S7,3).*

*Vi kalder det system, som fremkommer af det gamle ved denne drejning, for det reviderede system. Dette reviderede system har samme x-akse som det nye. Nu må den reviderede og den nye y-akse jo begge ligge i normalplanen til den nye x-akse og der findes derfor en drejning om den nye x-akse som fører den reviderede y-akse over i den nye, og jo altså fastholder den nye x-akse.*

*Det koordinatsystem, som fremkommer ved denne drejning af det reviderede, kalder vi for det nyreviderede. Da nu både den nye z-akse og den nyreviderede z-akse er vinkelret på såvel den nyreviderede x-akse som den nyreviderede y-akse og da det nye og det nyreviderede har samme orientering, så må det nyreviderede stemme helt overens med det nye, som derved er fremkommet af det gamle ved to på hinanden følgende drejninger.*

Vi skal lidt længere fremme se at en sammensætning af to drejninger hvis akser begge går gennem begyndelsespunktet selv er en sådan drejning og at der derfor til to vilkårlige koordinatsystemer altid findes en drejning som fører det ene over i det andet.

Vi har imidlertid allerede redskaber nok til at finde drejningsmatricen for en drejning i forhold til et vilkårligt koordinatsystem:

---

**13. Sætning: Drejningsmatrix i et vilkårligt koordinatsystem.**

---

*Antag at der er givet en drejning med (orienteret) akse  $a$  og drejningsmål  $u$ . Antag videre at der er givet et sædvanligt koordinatsystem, som vi betragter som det oprindelige, samt et specielt koordinatsystem, hvis  $z$ -akse falder sammen med drejningsaksen. Lad  $S$  være den matrix hvis søjler udgøres af de oprindelige koordinatsæt for de punkter som i det specielle koordinatsystem har koordinatsættene  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . Lad  $A$  være matricen for drejningen i det specielle system. Da vil drejningen i det oprindelige system have matricen*

$$SAS^{-1}$$

---

*Bevis : Vi ved at koordinatskifteafbildningen er lineær, da den er sammensat af to drejninger, som ifølge vores grundantagelser er lineære. Derfor er  $S$  netop matrix for overgangen fra specielle til oprindelige koordinater, da dens søjler består af de gamle koordinatsæt for de nye enhedsvektorer. Heraf følger sætningen af den generelle sætning for koordinatskift ved at bruge matricer til at udtrykke afbildningerne. E5 Ø6*

---

## 3.2: Ortogonale matricer.

---

Vi vil nu introducere begreberne ortogonal matrix og orienteringsbevarende matrix . De ortogonale matricer har en meget simpel algebraisk karakterisering, som gør det nemt at regne med dem. Enhver drejningsmatrix er både ortogonal og orienteringsbevarende og omvendt. Dette gør ortogonale orienteringsbevarende matricer til et bekvemt redskab for regning med drejninger.

Næste sætning er en forberedelse til definitionen af orthogonalitet

---

**14. Sætning: Betingelser for orthogonalitet**

---

*For en  $3 \times 3$ -matrix er følgende fire betingelser ensbetydende*

- 1)  $A^T A = A A^T = E$*
  - 2)  $A^T = A^{-1}$*
  - 3) søjlerne i  $A$  er indbyrdes ortogonale enhedsvektorer.*
  - 4) For alle  $x, y$  gælder at  $Ax \cdot Ay = x \cdot y$ .*
-

Bevis :

(1)  $\Leftrightarrow$  (2): Ækvivalensen af de to første betingelser er klar per definition af invers matrix.

(2)  $\Rightarrow$  (3): Fra den lineære algebra har vi at det element som står i række nr  $i$  og søjle nr  $j$  i  $A^T A$  kan skrives som  $A^i \cdot A^j$ , hvor  $A^i$  er søjle nr  $i$  i  $A$  (og dermed række nr  $i$  i  $A^T$ ). Betingelsen  $A^T A = E$  sikrer derfor at  $\|A_i\| = 1$ , eftersom  $A_i \cdot A_i$  er et diagonalelement i enhedsmatricen. Ved en tilsvarende betragtning fås at  $A_i \cdot A_j = 0$ , hvis  $i$  og  $j$  er forskellige. Dermed er det vist at (2) medfører (3).

(3)  $\Rightarrow$  (2): De samme udregninger viser at hvis betingelse (3) er opfyldt da er  $A^T A = E$ . Da vi ved at disse betingelser også medfører at  $A$  er invertibel har vi ved multiplikation med  $A^{-1}$  fra højre i denne ligning at  $A^T = A^{-1}$ , hvilket betyder at (2) er opfyldt.

(4)  $\Rightarrow$  (3): At (4) medfører (3) er en lige ud ad landevejen øvelse når man bemærker at søjlerne i  $A$  er det samme som vektorerne  $Ae_i$ .

(1)  $\Rightarrow$  (4): Antag at (1) er opfyldt. Idet vi ved at opfatte  $x$  og  $y$  også som søjlevektorer fås

$$Ax \cdot Ay = (Ax)^T \cdot Ay = x^T A^T Ay = x^T y = x \cdot y$$

---

## 15. Definition: Ortogonal matrix.

---

En matrix som opfylder betingelserne i forrige sætning kaldes ortogonal

---

E7 Ø8 Ø9

---

## 16. Sætning: Regneregler for ortogonale matricer

---

Den transponerede og den inverse af en ortogonal matrix er ortogonal. Produktet af to ortogonale matricer er en ortogonal matrix.

---

*Bevis : Lad  $A$  være ortogonal og sæt  $C = A^\top$ . Da er  $C^\top C = AA^\top = E$  og tilsvarende. Resultatet for invers matrix følger af at invers for ortogonale matricer er det samme som transponeret. Antag nu at også  $B$  er ortogonal og sæt  $C = AB$ . Da er*

$$C^\top C = (AB)^\top AB = B^\top A^\top AB = B^\top EB = B^\top B = E$$

---

### 17. Definition: Orienteringsbevarende matrix

---

*En matrix kaldes orien-teringsbevarende hvis dens determinant er positiv.*

---

### 18. Sætning: Regneregler for orien-teringsbevarende matricer

---

*Den transponerede og den inverse af en orien-teringsbevarende matrix er orien-teringsbevarende. Produktet af to orien-teringsbevarende matricer er en orien-teringsbevarende matrix.*

---

*Bevis : Dette er blot nogle af de grundlæggende regler for regning med deter-minanter.*

### 19. Sætning: En drejningsmatrix er ortogonal og orien-teringsbe-varende.

---

*En drejningsmatrix er ortogonal og orien-teringsbevarende.*

---

*Bevis : Vi tager udgangspunkt i at enhver drejningsmatrix kan skrives på for-men  $SA S^{-1}$  som formuleret i sætningen om drejningsmatrix i et vilkårligt ko-ordinatsystem. Det er så i henhold til regnereglerne nok at vise at  $S$  og  $A$  er ortogonale og orien-teringsbevarende.*

Bemærk at matrix med determinant  $+1$  ofte kaldes en *speciel* matrix. Vi har altså at matricen for en drejning er en speciel ortogonal matrix, og det er under den betegnelse de ofte mødes. Mængden af specielle ortogonale  $3 \times 3$  matricer betegnes derfor ofte som  $SO(3)$

### 20. Sætning:

---

$V$

---

i nærmer os nu klimax med En orien-teringsbevarende og ortogonal matrix er en drejningsmatrix.Lad  $A$  være en orien-teringsbevarende og ortogonal matrix. Da er  $A$  en drejningsmatrix.

*Bevis : Strategien i beviset er først at finde en drejningsakse ved at vise at 1 er egen værdi og benytte en tilhørende egenvektor.*

*Dernæst vises at afbildningen der svarer til matricen afbilder en plan ortogonal på akse ind i sig selv. Den tilsvarende  $2 \times 2$  matrix er ortogonal og afbildningen er derfor en drejning i denne plan.*

*Vi vil først altså først vise at 1 er en egen værdi for  $A$ .*

*Af ortogonalitetsbetingelsen  $A^T A = E$  fås at  $\det A^T \det A = \det E = 1$ . Desuden er  $\det A^T = \det A$ . Derfor har vi at  $(\det A)^2 = 1$  og da  $\det A > 0$  følger at  $\det A = 1$ . Betragter vi nu det karakteristiske polynomium for  $A$  så har det altså formen*

$$K(x) = -x^3 + ax^2 + bx + 1,$$

*for visse konstanter  $a$  og  $b$ , idet konstantleddet jo er  $\det A$ . Et tredjegrads polynomium har mindst en reel rod, og da  $K(0) > 0$  og  $K(x) \rightarrow -\infty$  for  $x \rightarrow \infty$  må der være der være mindst en positiv rod.*

*Antag nu at  $\lambda$  er en positiv rod og at  $w$  er en tilhørende egenvektor. Da har vi at for det første, fordi  $w$  er egenvektor, at*

$$Aw \cdot Aw = (\lambda w) \cdot (\lambda w) = \lambda^2 w \cdot w$$

*og for det andet, da  $A$  er ortogonal, at*

$$Aw \cdot Aw = w \cdot w$$

*og ved at sammenholde disse to udsagn får vi at  $\lambda^2 = 1$ . Vi har dermed, da  $\lambda > 0$ , vist at 1 er en egen værdi.*

*Vi tænker os at  $A$  er matrix for en afbildning  $F$  i forhold til standardbasen i  $\mathbb{R}^3$ . Lad desuden  $u$  og  $v$  være valgt således at  $u, v, w$  er en ortogonal basis for  $\mathbb{R}^3$ . Bestem et nyt sædvanligt koordinatsystem med samme begyndelsespunkt som det givne og med sin  $z$ -akse beliggende på  $w$ . Lad  $B$  betegne matricen for  $F$  i forhold til den nye basis. Da vil  $B = SAS^{-1}$  for en vis ortogonal matrix  $S$ , ifølge S13. Da følger det af S19 i forbindelse med reglerne for regning med ortogonale matricer, S16, at  $B$  er ortogonal.*

*Vi har valgt  $u$  og  $v$  som ortogonale på  $w$ . Derfor har vi at  $u \cdot w = 0$ , og videre, som følge af ortogonaliteten, at  $Bu \cdot Bw = 0$ . Men da  $F(w) = w$ , har vi at  $Bw = w$ , altså må  $Bu \cdot w = 0$ , og det vil sige at også  $Bu$  er ortogonal på  $w$ , og*

altså må være udspændt af  $u$  og  $v$ . Da der gælder tilsvarende for  $v$  har vi at  $B$  må have formen

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi har argumenteret for at  $B$  er ortogonal. Altså er søjlerne ortogonale og normerede. Heraf ses let at også søjlerne i undermatricen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}$$

er ortogonale og normerede. Benytter vi os nu af vores kendskab til ortogonale  $2 \times 2$  matricer, kan vi se at  $B$  er en drejningsmatrix. E10 Ø11

Ved hjælp af dette stærke resultat er det nu en let øvelse at bevise følgende

---

### 21. Sætning: Hovedsætningen om drejninger.

---

*Sammensætning af to drejninger med akser som skærer hinanden giver en drejning.*

---

Ø12

Det er naturligvis nu et indlysende spørgsmål om sammensætning af to drejninger, hvis akser ikke skærer hinanden, også vil resultere i en drejning. Det vil vi imidlertid ikke tage op her. Men svaret skal ikke holdes hemmeligt. Det er nej. Den naturlige ramme for dette spørgsmål er studiet af samtlige flytninger af rummet. En flytning er den mest generelle form for en geometribevarende afbildning, idet den bevarer afstande og orientering. Det er intuitivt klart, og også nemt at indse, at en drejning er en flytning i denne forstand. Andre eksempler er parallelforskydninger. Ø13 E14 E15 Ø16 E17 Ø18

## 4: Epilog

---

Moralen er enkel. Den afbildning som til en lineær afbildning knytter en matrix flytter også spørgsmål om sammensætning af drejninger over til et spørgsmål om specielle ortogonale matricer, som det er bekvemmere at løse. Og spørgsmålet er om sammensætningen af to drejninger med skærende akser igen er en drejning. Og det er det fordi produktet af to specielle ortogonale matricer er en speciel ortogonal matrix.



*Øvelse 1: Additionsformlerne.*

Vis at man kan udlede de trigonometriske additionsformler fra additionsformlen for drejningsmatricer. I hvilken forstand kan det opfattes som et bevis for disse formler?

---

*Øvelse 2: Pentagon*

Lad  $v = \frac{2\pi}{5}$ . Bestem drejningsmatricen for drejningen med denne drejningsvinkel. Bestem vha denne matrix koordinaterne for hjørnerne i en regulær femkant som er indskrevet i enhedscirklen og har et af hjørnerne på  $x$ -aksens positive del. Benyt (og bevis hvis det stikker dig) at  $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

---

*Øvelse 3: Er det en drejningsmatrix.*

Hvilke af følgende matricer er drejningsmatricer

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$$

---

*Øvelse 4: Drejningsmatricer om de andre akser.*

Bestem formel for drejninger om de to øvrige koordinatakser.

---

*Eksempel 5: Eksempel på anvendelse af formelen for drejningsmatrix i vilkårligt koordinatsystem.*

Vi ønsker at finde drejningsmatricen for den drejning på  $90^\circ$ , som har en akse der har diagonalen i  $yz$ -planen som akse, orienteret så  $(0, 1, 1)$  ligger positivt i forhold til begyndelsespunktet.

Vi betragter et nyt koordinatsystem, som fremkommer af det givne ved en drejning på  $45^\circ$  om  $x$ -aksen. I dette koordinatsystem er drejningsaksen  $z$ -aksen og drejningen har derfor her matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den drejning som fører det gamle system over i det nye har matricen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

som er den inverse matrix af den som optræder i sætningen (S13) som  $S$ . Den søgte matrix er derfor

$$SAS^{-1} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

---

*Øvelse 6: Øvelse i anvendelse af formelen for drejningsmatrix i vilkårligt koordinatsystem.*

Find matricen for en drejning på  $60^\circ$  om en akse som indeholder  $(1, 1, 0)$ .

---

*Eksempel 7: Check af ortogonalitet.*

Matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er ortogonal, hvilket ses ved udregning af  $A^T A$

---

*Øvelse 8: Permutationsmatricer er ortogonale.*

Vis at enhver permutationsmatrix er ortogonal

---

*Øvelse 9: Suppler op til ortogonalitet.*

Antag at vektorerne  $\frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)$  og  $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  er to af søjlerne i en ortogonal matrix. Bestem hvilke muligheder der er for den sidste søjle.

---

*Eksempel 10: En permutationsmatrix*

Matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er som det kan ses af definitionerne (og tilhørende udregninger!) ortogonal og orienteringsbevarende og derfor en drejningsmatrix. Egenvektorerne for egenværdien 1 bestemmes ved gaussisk elimination, startende med matricen  $A - 1E$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Egenrummet for 1 har dimension 1 og  $\{(1, 1, 1)\}$  er en basis for det. Derfor er  $a = (1, 1, 1)$  en vektor på drejningsaksen.

Vektoren  $x = (1, -1, 0)$  er ortogonal på drejningsaksen og har billedet  $y = (-1, 0, 1)$ . Vinklen  $v$  mellem  $x$  og  $y$  er givet ved

$$\cos v = \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} = -\frac{1}{2}.$$

Da  $\det(a, x, y) = -3 < 0$  er gå den korteste drejning fra  $x$  til  $y$  i negativ omløbsretning og derfor er  $v = -120^\circ$ .

---

*Øvelse 11: Permutationer giver drejninger.*

Vis at enhver permutationsmatrix er en drejningsmatrix. Lav en liste over samtlige permutationsmatricer og bestem for hver af dem en drejningsakse med tilhørende drejningsvinkel.

---

*Øvelse 12: Regning med drejninger.*

Lad  $X$  og  $Y$  betegne drejningerne på  $90^\circ$  omkring  $x$ - og  $y$ -aksen. Find matricerne, akserne og vinklerne for  $XY$ ,  $YX$ ,  $XYX$  og  $YXY$ .

---

*Øvelse 13: Klassifikationer.*

Lad drejningerne med akse gennem begyndelsespunktet være inddelt i klasser efter deres drejningsvinkel, sådan at alle drejninger med samme drejningsvinkel udgør en klasse.

Vil denne klassedeling harmonere med sammensætning af drejninger, i den forstand at den klasse, en sammensætning havner i, alene afhænger af de klasser komponenterne i sammensætninger kommer fra. Eller med andre ord: kan man beregne drejningsvinklen for en sammensætning af to drejninger alene ved hjælp af deres drejningsvinkler.

Hvordan afhænger svaret af dimensionen.

Og hvad så hvis man inddeler efter drejningsakse.

---

*Eksempel 14: En drejning er afstandsbevarende.*

(I dette eksempel forudsætter vi det kendt at afstanden mellem to punkter med koordinatsættene  $x$  og  $y$  er givet ved  $\|x - y\|$  og at det for alle  $u$  gælder at  $\|u\|^2 = u \cdot u$ .)

Vi kan vælge et koordinatsystem med begyndelsespunkt på aksens og følgelig en ortogonal matrix  $A$ , som udtrykker drejningen. Lad  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Da er

$$\|Ax - Ay\|^2 = \|A(x - y)\|^2 = A(x - y) \cdot A(x - y) = (x - y) \cdot (x - y) = \|x - y\|^2$$

---

*Eksempel 15: Kuglebevarende drejninger.*

En drejning er kuglebevarende hvis og kun hvis dens akse går gennem centrum.

Antag at akse går gennem centrum  $c$ . Vælg et koordinatsystem med begyndelsespunkt i centrum. Hvis kuglen har radius  $R$  og  $\|x\| = R$  så vil  $\|Ax - c\| = \|Ax - Ac\| = \|x - c\| = R$

Antag så at drejningen er kuglebevarende for en eller anden kugle. Læseren kan selv vha et passende koordinatsystem udfylde detaljerne i følgende argument: En drejning vil føre midtpunkt i midtpunkt. Centrum er midtpunkt for to diametralt modsatte punkter. Billedet af to diametralt modsatte punkter er to diametralt modsatte punkter. Derfor vil centrum være et fixpunkt og således ligge på akse (med mindre der er tale om den identiske afbildning).

Vi vil derfor omtale mængden af drejninger med en akse gennem begyndelsespunktet som enhedskuglens drejningsgruppe. Se Ø16 for en uddybning.

---

*Øvelse 16: Drejningsgruppen for geometriske konfigurationer.*

Mængder af drejninger som bevarer alle karakteriserende træk ved en geometrisk konfiguration kaldes drejningsgruppen for denne konfiguration. Ordet gruppe anvendes fordi der er tale om det matematiske begreb gruppe. Dette spiller imidlertid ikke nogen rolle i denne sammenhæng.

Bestem drejningsgruppen for følgende konfigurationer i rummet:

- 1) en linje
- 2) en plan
- 3) en cirkel
- 4) en cylinder
- 5) akserne i et koordinatsystem

.

---

*Eksempel 17: Eulervinkler.*

Vi lader  $X_\alpha$  betegne drejningen om  $x$ -aksen med drejningsvinkel  $\alpha$  og gør tilsvarende for de to andre akser. Man kan da vise at enhver drejning kan skrives på formen  $Z_\alpha X_\beta Z_\gamma$ , for passende vinkler  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Disse vinkler er endda entydigt bestemt, når vi ser bort fra de oplagte flertydigheder som følge af periodicitet. Helt præcist er der entydighed hvis vi foreskriver at  $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$  og  $0 \leq \gamma < \pi$ .

Disse vinkler kaldes drejningens Euler-vinkler og er meget anvendt i fysik. Da ethvert koordinatsystem med samme begyndelsespunkt fremkommer ved en drejning af et referencesystem kan Euler-vinklerne altså også bruges til at angive de mulige koordinatsystemer. Hvis man bevæger et stift legeme vil et koordinatsystem anbragt med begyndelsespunkt i legemets tyngdepunkt blive bevæget. Beskrivelsen af dette medfølgende koordinatsystem kan da (har det vist sig) med fordel foretages ved hjælp af Eulervinklerne.

Denne fremstilling er praktisk da vi har simple formler for drejninger om de enkelte koordinataksler.

For en given drejning er det ikke helt trivielt at bestemme dens Euler vinkler. Der findes i de mange referenceværker opskrifter til beregning af Eulervinklerne. Selv google fører til rimelige resultater. Prøv bare!

Vi kan opfatte Eulervinklerne som en parametrisering af mængden af drejninger (med akse gennem begyndelsespunktet). Lidt løst — både hvad angår begreberne og udsagnet — betyder dette, at denne mængde af drejninger er et 3-dimensionalt kontinuum.

---

*Øvelse 18: Geodætiske koordinater for en drejning.*

Angiv en parametrisering af enhedskuglens drejningsgruppe ved at benytte at en drejning er fastlagt af sin orienterede akse og sin drejningsvinkel. Den orienterede akse kan angives ved det punkt på enhedskuglen hvor aksens positive del rammer. Dette punkt kan angives ved dets længde og bredde. Gør rede for i hvilket omfang disse parametre bestemmer drejningen entydigt.

Her bliver altså ligesom i E17 tale om en parametrisering med tre parametre.

---

## 5: Stikordsregister

---

additionsformel, 20

2D, 7

additivitet

2D, 7

bevarelse, 5

drejning

sammensætning, 19

drejningsakse, 10

drejningsmatricer, 7

drejningsmatrix

2D, 20

nødvendig betingelse, 17

tilstrækkelig betingelse, 17

drejningsplan, 10

drejningsvinkel

2D, 6

femkant, 20

gruppeteori, 4

Kontinuitet, 7

koordinatskifte

ved drejning, 11, 14

koordinatsystem

drejning af, 10

linearitet

3D, 10

lineær

2D, 7

matrix

drejning 2D, 7

drejning om koordinatakse, 10,  
20

orienteringsbevarende, 17

orienteringsbevarende 2D, 8

ortogonal 2D, 8

vilkårlig drejning, 15, 20, 21

orienteringsbevarende matrix

2D, 8

3D, 15

Ortogonal

2D, 7

ortogonal

3D, 15

check af, 21

kriterier for, 15

regneregler for, 16

vektorer, 10

ortogonal matrix

2D, 8

3D, 15

pentagram, 20

permutationsmatrix

er drejningsmatrix, 19

er ortogonal, 21

speciel, 17

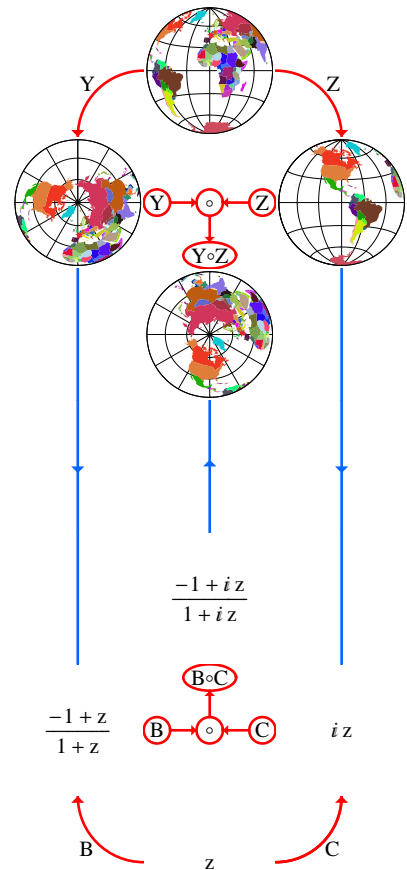
udtryk

i koordinater, 12



Anders Madsen

# DREJNING SOM HOMOGRAFI



# KONKRETE ALGEBRAISKE STRUKTURER

# 3



Dette er et hæfte i en serie med titlen ”Konkrete algebraiske strukturer”, som jeg har skrevet til algebrakurset (E1) på matematikuddannelsen ved IMFUFA på RUC.

Hæfterne skal ses i sammenhæng med en anden serie hæfter med titlen ”Abstrakte algebraiske strukturer”. Disse to serier udgør hver sin kæbe i en knibtang.

Naturligvis ville det være tomt (og frustrerende) at undervise i abstrakt algebra uden inddragelse af konkrete eksempler og det ville være fattigt (og perspektivforladt) kun at gennemgå konkrete eksempler uden at inddrage de underliggende abstrakte strukturer.

På den anden side er der en vis skønhed i at fremhæve den abstrakte karakter ved at isolere den og lade dens top-down karakter fremstå tydeligt som i det forkætrede forbillede ”Matematikens elementer” af Bourbaki. Starte med de groveste strukturer og efterhånden tilføje finere strukturelementer. Alle resultater, som går igen og igen, formuleres og bevises en gang for alle.

Ligeledes er der en tilfredsstillelse forbundet med at lade de enkelte konkrete strukturer stå så enkelt som muligt, uden overflødige dikkedarer, *das Ding an sich*. Og der er fornøjelsen ved at se det essentielt samme argument komme igen og igen i forskellige forklædninger.

Udover den æstetiske tilfredsstillelse ved den rene abstraktion og den rene fornøjelse ved de konkrete detaljer har begge disse perspektiver en stor erkendelsesmæssig betydning og bidrager til udviklingen af kompetencer som er væsentlige for matematikere.

Jeg har valgt at fremhæve de to modsatrettede men samspillende perspektiver ved den opdeling som de to serier repræsenterer. De enkelte konkrete strukturer er fremstillet i enkeltstående fremstillinger uden indbyrdes referencer. Stof som forudsættes flere steder er medtaget hvert sted. Men udvalget af detaljer er foretaget på en sådan måde at det bedst muligt kan levere stof til den abstrakte del.

Den matematiske kerne for de enkelte hæfter, uden forbindende tekst og illustrationer, har foreligget tidligere i mere rå form beregnet på uddybning ved forelæsning og ikke egnet til selvstudium, ikke mindst på grund af utallige trykfejl og tanketorsk, som de studerende med stor tålmodighed har fanget. Dette skylder jeg dem tak for og derfor er hæfterne tilegnet alle tidligere og nuværende studerende på E1, som jeg takker for deres medvirken.

Hæfterne findes i netudgaver med alle referencer som aktive links og med opdateringer:

<http://milne.ruc.dk/~am/algebra>

Anders Madsen, november 2006

# Indholdsfortegnelse

1	Prolog	
2	Komplekse tal og plangeometri	
1	Komplekse tal	4
2	Elementære anvendelser på geometri	6
3	Homografiske transformationer	9
4	Ikke-Euklidisk geometri	15
3	Komplekse tal og rumgeometri	
1	Stereografisk projektion	19
2	Stereografisk projektion i komplekse koordinater	24
3	Stereografisk konjugerede afbildninger	26
4	Stereografisk konjugering af drejning i rummet	28
4	Spejlinger og inversioner	
1	Inversioner	31
2	Spejlinger i rummet og inversioner i planen	33
5	Epilog	
6	Stikordsregister	

# 1: Prolog

---

I dette hæfte skal du møde forskellige konkrete eksempler på algebraiske strukturer. Vi taler om en algebraisk struktur, når vi har en bestemt type objekter og en eller flere operationer på denne type objekter, der fører til et objekt af samme type, samt nogle regneregler for disse operationer.

Det mest oplagte eksempel har som objekter de reelle tal, som operationer de sædvanlige aritmetiske operationer med de sædvanlige regneregler.

Vi skal i det følgende se eksempler på to typer strukturer.

I den ene er objekterne bijektive afbildninger af en mængde ind i sig selv og der er to operationer, nemlig sammensætning af to afbildninger og invertering af en enkelt afbildning.

I den anden er objekterne invertible matricer og operationerne er multiplikation af to matricer og invertering af en matrix.

Vi skal se eksempler på relationer mellem forskellige strukturer, nemlig eksempler, hvor der findes en strukturbevarende oversættelse fra en struktur til en anden, der gør det muligt at flytte algebraiske opgaver fra den ene struktur til algebraiske opgaver i den anden. Der vil være en opsamling med tydeliggørelse af den røde tråd i epilogen.

## 2: Komplekse tal og plangeometri

---

De komplekse tal kan bruges til geometri. De kan benyttes til en direkte algebraisering via komplekse koordinater. Punkter i planen kan direkte repræsenteres af komplekse tal og geometriske fænomener som afstand og vinkel kan beskrives ved algebraiske operationer på komplekse tal. Desuden kan drejninger i planen beskrives ved afledte fænomener som matricer med komplekse elementer. Også geometriske fænomener fra rummet kan behandles vha komplekse tal. Men vi indleder med en behandling af plan geometri.

### 2.1: Komplekse tal

---

*Grundlaget og forudsætninger*

Om de komplekse tal behøver vi kun at vide følgende:

Algebraiske grundregler:

- 1) Vi kan foretage de sædvanlige algebraiske operationer, addition, subtraktion, multiplikation og division og benytte de sædvanlige regneregler, altså dem som gælder for de reelle tal.
- 2) Der findes et komplekst tal  $i$  som opfylder ligningen  $i^2 = -1$ .
- 3) Ethvert komplekst tal kan på entydig måde skrives som  $x + yi$ , hvor  $x$  og  $y$  er reelle, og kaldes henholdsvis realdel og imaginærdel af tallet.
- 4) Det konjugerede af  $z = x + yi$ , hvor  $x$  og  $y$  er reelle, er givet ved  $\bar{z} = x - yi$ .

Geometriske grundregler. Til at formulere disse skal vi benytte de to operationer modulus  $|z|$  og argument  $\arg(z)$  på  $z$ . Der gælder da at

- 5) Hvis der er givet et koordinatsystem i planen svarer ethvert punkt til et bestemt komplekst tal  $z = x + yi$ , hvor  $(x, y)$  er punktets koordinatsæt. Tallet  $z$  kaldes for punktets komplekse koordinat (mht koordinatsystemet). Hvis det er klart hvilket koordinatsystem der refereres til vil vi benytte samme betegnelse for et punkt og dets koordinat.
- 6)  $|z|$  er afstanden mellem  $z$  og 0.
- 7)  $|z|^2 = z\bar{z}$
- 8)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- 9)  $\arg(z_1)$  er det med fortegn regnede måltal for vinklen mellem  $x$ -aksen og linjen fra 0 til  $z_1$ .
- 10)  $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
- 11) Afbildningen  $z \mapsto z + a$  er for fast  $a$  en parallelforskydning (og vil som følge deraf) bevare vinkler og afstande.
- 12) Afbildningen  $z \mapsto az$  er for fast  $a \neq 0$  en drejning om 0 med drejningsvinklen  $\arg(a)$ , regnet med fortegn, efterfulgt af en multiplikation ud fra 0 med faktoren  $|a|$ .

Grundregler for eksponentialfunktionen.

- 13)  $e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$  for reelle  $x$  og  $y$ .
- 14)  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$  for komplekse  $z_1$  og  $z_2$ .

Dette er de grundlæggende regler som vi benytter i det følgende uden udtrykkelig henvisning. Nogle af disse regler er definitioner andre er sætninger. Lige hvordan fordelingen kan eller skal være på definitioner og sætninger vil vi ikke tage op her; denne fordeling kan i øvrigt foretages på mange måder.

Om de komplekse tals historie vil vi nøjes med at anføre at de blev opfundet i 1500-tallet i Italien i bestræbelser på at løse tredjegradsligninger, og at deres anvendelse i geometri første gang blev foreslået af den norske matematiker *Caspar Wessel*, som i øvrigt havde sit virke i København og var ansvarlig for en geodætisk opmåling af landet. Hans forslag fik ikke nogen opmærksomhed og nogle år senere fik den store Gauss den samme ide og så slog den hurtigt igennem. *Gauss* var i øvrigt også i perioder optaget af geodætiske opmålinger.

## 2.2: Elementære anvendelser på geometri

---

*Vi udvider det geometriske arsenal.*

Vi tilføjer et par regler, som vi udleder af grundreglerne:

- 15) Afstanden mellem  $z_1$  og  $z_2$  er  $|z_1 - z_2|$
- 16)  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$
- 17) Vinklen mellem linjen fra  $a$  til  $u$  og linjen fra  $a$  til  $v$  betegnes  $\angle(uav)$   
og er givet ved  $\arg\left(\frac{u-a}{v-a}\right)$

Vi kan udlede 15 af 6 ved at benytte 11 som det er skitseret i følgende tegneserie:

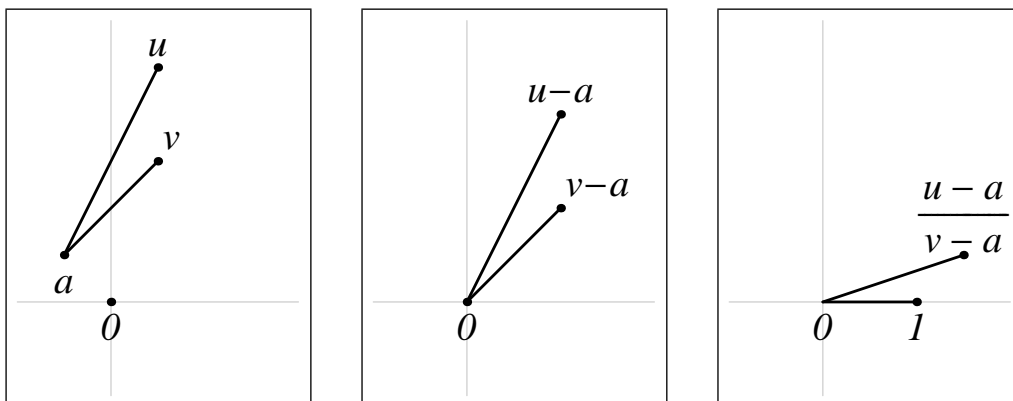


Ved at bruge 10 fås at

$$\arg(z_1) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2 = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \arg(z_2),$$

hvoraf 16 kan fås ved at flytte rundt på leddene i ligningen.

Vi kan udlede 17) af 9) ved at først at benytte 11) (vi benytter translation med  $-a$ ) og dernæst 12) (vi dividerer med  $v - a$ ). Ved begge operationer bevares vinkler. Argumentationen er illustreret i følgende tegneserie:



### *Cirkler og dobbeltforhold*

Tre punkter i planen vil ligge på en entydigt bestemt cirkel, hvis de da ikke ligger på samme linje. At bestemme en algebraisk betingelse (for eksempel en ligning) for at et punkt ligger på denne cirkel er i sædvanlig analytisk geometri (altså sædvanlige reelle koordinater) lidt bøvet, men kan med kompleks koordinat gøres ganske elegant (og virkningsfuldt). Til dette formål anvendes det såkaldte dobbeltforhold, som dermed skulle være tilstrækkeligt motiveret:

---

#### **1. Definition: Dobbeltforhold**

---

For fire forskellige komplekse tal  $u, v, x, y$  definerer vi dobbeltforholdet som

$$\text{df}(u, v, x, y) = \frac{\frac{u-x}{v-x}}{\frac{u-y}{v-y}}.$$

---

Her følger så den bebudede karakterisering

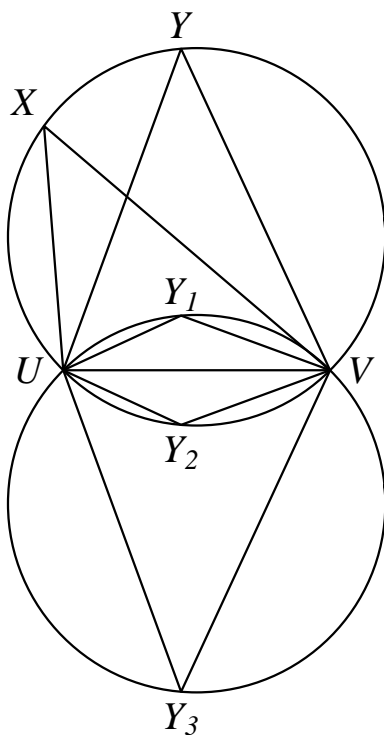
#### **2. Sætning: Formel for cirkel**

---

Lad  $u, v, x \in \mathbb{C}$  være indbyrdes forskellige. Antag at  $u, v, x$  bestemmer en cirkel. Da vil  $y$  ligge på denne cirkel hvis og kun hvis  $\text{df}(u, v, x, y)$  er reelt.

---

Bevis : For bekvemmeligheds skyld benytter vi  $U$  for det punkt som har  $u$  som kompleks koordinat. Tilsvarende benyttes  $V, X, Y$ . Ved anvendelse af 17 får vi at



$$\angle UXV = \arg \left( \frac{u-x}{v-x} \right)$$

Hvis vi yderligere har punktet  $Y$  så er vinklen  $\angle UYV$  givet som

$$\angle UYV = \arg \left( \frac{u-y}{v-y} \right).$$

Forskellen mellem de to vinkler er da givet ved

$$\begin{aligned} \angle UXV - \angle UYV &= \\ \arg \left( \frac{u-x}{v-x} \right) - \arg \left( \frac{u-y}{v-y} \right) &= \\ \arg \left( \frac{\frac{u-x}{v-x}}{\frac{u-y}{v-y}} \right) &= \arg(df(u, v, x, y)). \end{aligned}$$

Vi har at  $df(u, v, x, y)$  er reelt netop hvis argumentet er 0 eller  $\pi$ . Og dette er altså ensbetydende med at forskellen på de to vinkler er 0 eller  $\pi$ , hvilket er ensbetydende med at  $Y$  ligger på den cirkel som er bestemt af de  $U; V; X$ . Dette er illustreret på tegningen, hvoraf man finder:

$$\begin{aligned} \angle(UYV) &= \angle(UXV), & \angle(UY_1V) &= -\angle(UXV) + \pi \\ \angle(UY_2V) &= \angle(UXV) + \pi, & \angle(UY_3V) &= -\angle(UXV). \end{aligned}$$

Disse relationer mellem vinklerne kan findes ved at benytte at en periferivinkel måler halvdelen af den bue den spænder over. Detaljerne overlades til læseren

### 3. Sætning: Formel for linje

Lad  $u, v, x \in \mathbb{C}$  være indbyrdes forskellige. Antag at  $u, v, x$  ligger på samme linje. Da vil  $y$  også ligge på denne linje hvis og kun hvis  $df(u, v, x, y)$  er reelt.

*Bevis : Det er ukompliceret at lave et bevis ved at modificere beviset for den tilsvarende sætning for cirkler. Så det overlades til dig, kære læser*

*Cirkel i udvidet forstand*

Der gælder altså ensartede regler for cirkler og linjer og det skal meget hurtigt vise sig hensigtsmæssigt i det hele taget at opfatte cirkler og linjer som en samlet klasse. Derfor følgende

---

#### **4. Definition: Cirkel i udvidet forstand**

---

*Ved en cirkel i udvidet forstand forstås en cirkel eller en ret linje. Vi vil ofte nøjes med at tale om en cirkel, når vi egentlig mener cirkel i udvidet forstand.*

---

Lad os se et eksempel på nytten af at arbejde med cirkler i udvidet forstand. Vi skal ikke bruge resultatet, så vi nøjes med følgende

#### **5. Bemærkning : Karakterisering af cirkelns indre og ydre**

*Resultaterne ovenfor om karakterisering af cirkler (i udvidet forstand) kan udvides til at karakterisere de to områder som cirklen deler planen i. Lad  $C$  betegne cirklen; den deler resten af planen i to områder. Det af områderne som ligger til højre for cirklen, når vi passerer punkterne i rækkefølgen  $u, x, v$ , kalder vi  $O_+$ , det andet  $O_-$ . Da er*

$$\begin{aligned}C &= \{y : \text{Im}(\text{df}(u, v, x, y)) = 0\} \\O_+ &= \{y : \text{Im}(\text{df}(u, v, x, y)) > 0\} \\O_- &= \{y : \text{Im}(\text{df}(u, v, x, y)) < 0\}\end{aligned}$$

## **2.3: Homografiske transformationer**

---

*Motivation for at indføre homografier*

De simpleste algebraiske afbildninger af den komplekse plan ind i sig selv er førstegradspolynomier, altså afbildninger  $f$  af formen  $f(z) = az + b$ , også kaldet affine afbildninger eller (lidt løsagtigt) lineære afbildninger. Her er  $a$  og  $b$  komplekse konstanter. Ved hjælp af de to grundregler 11 og 12 ses at der er tale om en drejning først efterfulgt af en multiplikation med centrum i 0 og dernæst af en translation, de simpleste geometriske afbildninger.

Disse afbildninger er specialtilfælde af generelle polynomier, som fremkommer ved at vi tillader vilkårlig gentagelse af addition og multiplikation. Hvis vi



også inddrager division får vi en endnu større klasse af afbildninger hvor funktionen kan skrives som en brøk med polynomier i tæller og nævner. Hvis vi nøjes med kvotienter, hvor både tæller og nævner er førstegradspolynomier får vi en specielt interessant klasse, som vi skal studere i det følgende. Et medlem af denne klasse kaldes en homografisk transformation, eller kort en homografi. Denne klasse spiller en afgørende rolle i mange forskellige områder af matematikken og en homografi har mange andre betegnelser: *Möbius transformation* (opkaldt efter Möbius), *bruden lineær funktion* (altså en brøk med lineære funktioner i tæller og nævner), på engelsk: *linear fractional transformation*. Homografier har stor betydning i *ikke-Euklidisk geometri*, hvilket vi lige vil strejfe længere fremme.

*Definitioner og konventioner*

---

## 6. Definition: Homografisk transformation

---

Lad

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

være en invertibel matrix med komplekse tal som elementer. Vi definerer da en afbildning  $h_A$  ved forskriften

$$h_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

og defineret for de komplekse tal for hvilke forskriften giver mening.

Vi kalder den for den af  $A$  bestemte homografiske transformation (i snæver forstand).

---

## 7. Bemærkning : Mange matricer giver samme funktion

*To matricer som er proportionale giver anledning til samme homografiske transformation.*

Det viser sig meget ubekvemt at skulle holde styr på definitionsområderne for homografier, især når man ønsker at studere sammensætninger af sådanne. Problemet er naturligvis at vi skal undgå division med 0. Den overraskende løsning på dette problem består i at tillade denne division ved at indføre et nyt tal  $\infty$ , og udvide regneoperationerne til (delvis) at omfatte  $\infty$ . Dette vil vi gøre på en systematisk og gennemtænkt måde, og I behøver ikke lade jer kue af

jeres indbyggede ubehagelige fornemmelser, der siger at det hverken kan eller må man.

---

## 8. Definition: Den udvidede komplekse talplan

---

*Vi tilføjer elementet  $\infty$  til de komplekse tal og kalder den udvidede mængde for  $C^*$ . Vi udvider de algebraiske operationer til at omfatte  $\infty$  ved at sætte  $a + \infty = \infty$  for alle  $a$  og  $a\infty = \infty$  for  $a \neq 0$ . Desuden sættes  $\frac{a}{\infty} = 0$  for alle  $a \neq \infty$*

---

Vi kan bemærke at disse udvidelser dækker de oplagte tilfælde. Vi definerer hverken  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$  eller  $\frac{0}{0}$ . Med disse definitioner kan vi opretholde de sædvanlige regler for regning der involverer de fire elementære regneoperationer. Vi vil affinde os med denne ikke helt skarpe formulering og undlade at eftervise den.

Med denne udvidelse af talområdet kan vi udvide enhver homografisk transformation i snæver forstand til at være defineret i hele  $C^*$ . Hvis funktion-sudtrykket ikke umiddelbart giver mening i forhold til de udvidede operationer, så kan man benytte det ækvivalente udtryk

$$h_A(z) = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}}$$

Det vil nemlig være sådan at mindst et af de to udtryk har mening, og at de giver samme resultat hvis de begge har mening.

F.eks fås at

$$h_A\left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{-\frac{ad}{c} + b}{0} = \infty,$$

da tælleren ikke er 0 (begrundelsen er overladt til den kære læser.), og

$$h_A(\infty) = \frac{a + \frac{b}{\infty}}{c + \frac{d}{\infty}} = \frac{a}{c},$$

hvis  $c \neq 0$ .

Den således udvidede homografiske transformation kalder vi en homografisk transformation i udvidet forstand. Hvis vi blot taler om en homografisk transformation er det den udvidede vi refererer til. E1 Ø2

## 9. Bemærkning : Udvidelse af definition af dobbeltforhold

*Dobbeltforhold udvides til det tilfælde, hvor et af de fire tal er  $\infty$ . Dette sker ved at de to tællere eller nævnere, hvor  $\infty$  forekommer, erstattes med tallet 1.*  
E3

*Beskrivelse af homografier vha dobbeltforhold*

Det ultimative mål er at vise at homografier bevarer cirkler. Vi vil nå frem til dette gennem en kæde af ræsonnementer, hvor vi først karakteriserer homografier som afbildninger som bevarer dobbeltforholdet og kombinerer dette med en karakterisering af cirkler vha dobbeltforholdet.

## 10. Sætning: Homografier bevarer dobbeltforholdet

---

*Hvis  $h$  er en homografi, da er*

$$\text{df}(f(u), f(v), f(x), f(y)) = \text{df}(u, v, x, y).$$

---

*Bevis : Det er ukompliceret at bevise dette for simple homografier af typerne  $z + a, az, \frac{1}{z}$ . Derefter bemærkes at enhver homografi kan opnås som sammensætning af disse simple typer. Sluttelig benyttes at dobbeltforholdsbevarelse bevares ved sammensætning. Ø4 Ø5*

## 11. Sætning: Tre værdier er nok

---

*Antag at  $f$  bevarer dobbeltforholdet og lad tre forskellige elementer  $a, b, c$  i  $\mathbb{C}^*$  være givet og lad  $a', b', c'$  betegne deres billeder. Da er  $f$  entydigt bestemt heraf*

---

*Bevis : Lad  $x$  være et vilkårligt element i  $\mathbb{C}^*$ ; vi vil vise at  $x' = f(x)$  er bestemt alene af  $a, a', b, b', c, c'$ . Men vi har jo at*

$$\text{df}(x, a, b, c) = \text{df}(x', a', b', c').$$

*Dette betyder per definition at*

$$\frac{\frac{x-b}{a-b}}{\frac{x-c}{a-c}} = \frac{\frac{x'-b'}{a'-b'}}{\frac{x'-c'}{a'-c'}},$$

som kan omskrives til

$$(x' - c')(x - b)(a - c)(a' - b') = (x' - b')(x - c)(a - b)(a' - c').$$

Idet vi sætter  $p = (x - b)(a - c)(a' - b')$  og  $q = (x - c)(a - b)(a' - c')$  er ligningen ensbetydende med at  $(x' - c')p = (x' - b)q$ .

Hvis  $p = q$  har denne ligning netop løsningen  $x' = \infty$ . I modsat fald er der tale om en førstegradsligning  $(p - q)x' = pc' - qb'$  i  $x'$  som også netop har en løsning.

Det var det vi ville bevise. Vi bemærker dog lige af hensyn til det følgende at  $x'$  kan skrives eksplicit som

$$x' = \frac{p}{p - q}c' - \frac{q}{p - q}b',$$

Vi har hermed overstået forberedelserne til følgende hovedresultat

---

**12. Sætning: Homografisk = dobbeltforholdsbevarende**

---

*En afbildning som bevarer dobbeltforholdet er en homografi*

---

*Bevis:* Lad  $f$  være dobbeltforholdsbevarende. Vælg tre punkter  $a, b, c$  og sæt  $a' = f(a), b' = f(b), c' = f(c)$ . Da vil  $f$  i følge beviset for S11 være givet ved

$$f(x) = \frac{p}{p - q}c' - \frac{q}{p - q}b',$$

hvor

$$\frac{p}{p - q} = \frac{(x - b)(a - c)(a' - b')}{(x - b)(a - c)(a' - b') - (x - c)(a - b)(a' - c')}.$$

Ved at benytte dette udtryk og et tilsvarende for det andet led ses at  $f$  er en homografi.

---

**13. Sætning: Tre værdier er nok (for en homografi)**

---

Lad  $x, y, z$  og  $u, v, w$  være to sæt af indbyrdes forskellige komplekse tal. Der findes da netop en homografi  $h$  for hvilken  $h(x) = u, h(y) = v, h(z) = w$

---

*Bevis :* Da en homografi er dobbeltforholdsbevarende så følger dette resultat som et korollar af S11, om dobbeltforholdsbevarende afbildninger,

E6

#### 14. Sætning: Sammensætning og invertering af homografier

---

*Der gælder at*

$$h_A \circ h_B = h_{AB}, \quad h_A^{-1} = h_{A^{-1}}.$$

---

*Bevis :* Vi bemærker først at det er klart at sammensætning af funktioner som bevarer dobbeltforholdet fører til funktioner af samme type. På grund af S12 gælder det tilsvarende for homografier.

*Formlen for sammensætningen ses direkte ved udregning af begge sider for sådanne værdier som ikke giver anledning til undtagelser: Lad*

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad g(z) = \frac{pz + q}{rz + s}.$$

*Da er*

$$f(g(x)) = \frac{a \frac{pz+q}{rz+s} + b}{c \frac{pz+q}{rz+s} + d} = \frac{a(pz+q) + b(rz+s)}{c(pz+q) + d(rz+s)} = \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + (cq+ds)}$$

*og*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

*De to afbildninger på begge sider af lighedstegnet er derfor homografier som stemmer overens i (langt mere end) tre punkter og er derfor identiske.*

*Resultatet om inversdannelse følger af at den identiske afbildning svarer til enhedsmatricen, hvilket ses ved inspektion.*

Vi har nu afklaret forholdet mellem homografier og dobbeltforholdsbevarende afbildninger. Vi går herefter over til at beskrive homografiers forhold til cirkler, som vi allerede har karakteriseret vha dobbeltforhold.

*Homografiers forhold til cirkler*

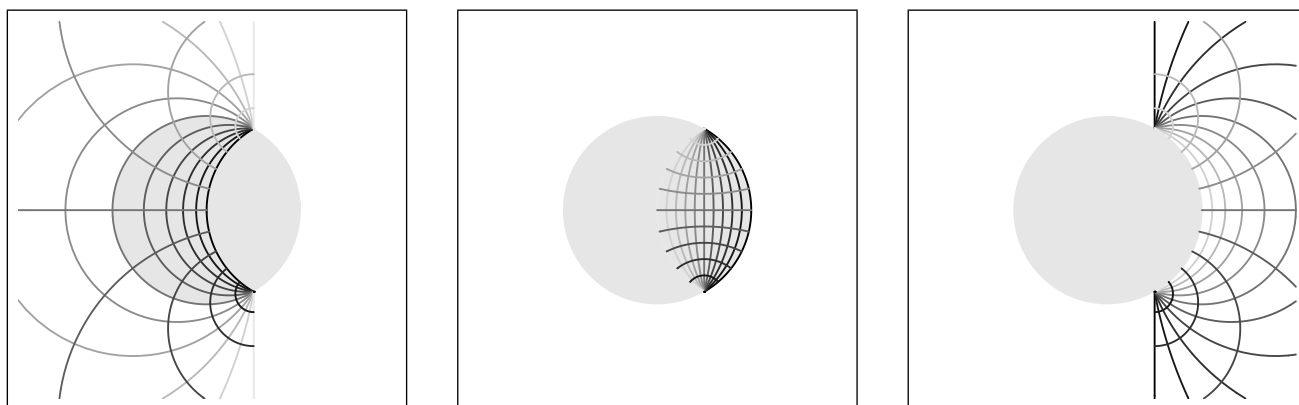
Homografiske transformationer harmonerer fint med cirkler. For at give en særlig elegant og afrundet fremstilling af dette er det formålstjenligt at opfatte rette linjer som cirkler der går gennem  $\infty$ .

## 15. Sætning: Homografier er cirkelbevarende

*Billedet ved en homografi af en cirkel er en cirkel. Billederne af de to områder som en cirkel deler planen i er de to områder som billedcirklen deler planen i.*

*Bevis : Hvis  $u, v, x, y$  ligger på en cirkel da er  $df(u, v, x, y)$  reelt. Da homografien  $h$  bevarer dobbeltforhold er også  $df(f(u), f(v), f(x), f(y))$  reelt hvilket igen indebærer at punkterne  $f(u), f(v), f(x), f(y)$  ligger på en cirkel.*

*Resten følger af at de nævnte områder svarer til fortegnet af imaginærdelen af dobbeltforholdet og at dobbeltforholdet bevares. Benyt bemærkningen der står lige efter D4.*



Figur 1. Virkningen af homografien  $\frac{1}{1-z}$  på cirkler. De cirkler som er trukket kraftigst op i en af rammerne, er billederne af de cirkler, som er trukket kraftigst op i rammen til venstre for den. (Den yderst til højre anses for at være til venstre for den yderst til venstre). Cirkler med samme gråtone svarer til hinanden

Ø7 Ø8

## 2.4: Ikke-Euklidisk geometri

### Parallelaksiomet

Den sædvanlige plane geometri kaldes den Euklidiske geometri, opkaldt efter *Euklid*, som levede i det antikke Grækenland og gav en sammenfatning bygget

op om nogle få aksiomer om de mulige relationer ("skære", "ligge på", "gå gennem") mellem linjer og punkter.

Et af disse aksiomer er parallelaksiomet, som lidt løst formuleret siger at der til en given linje og et givet punkt uden for den givne linje netop findes en linje gennem punktet og parallel linjen, idet to linjer anses for at være parallelle hvis de ikke skærer hinanden i noget punkt.

Dette aksiom forekom at være af en anden karakter end de øvrige; igennem to tusind år var der store bestræbelser på at vise at parallelaksiomet er en sætning, som kan bevises på grundlag af de resterende aksiomer. Disse bestræbelser fik en overraskende ende da det vistes, at det er muligt at konstruere en geometri, hvor de øvrige aksiomer gælder, men ikke parallelaksiomet.

En måde at konstruere en sådan model på benytter homografiske transformationer. Den hedder Poincarès model for den ikke-Euklidiske geometri. Vi forsøger en præcisering:

---

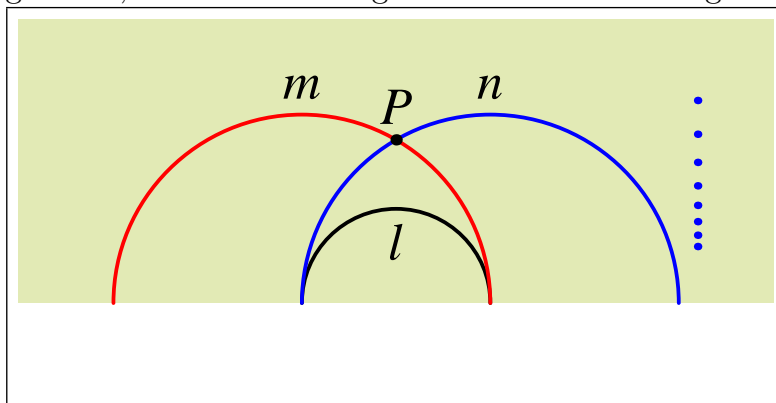
## 16. Definition: Ikke-Euklidisk geometri

---

*Lad  $H$  betegne mængden af punkter som ligger over  $x$ -aksen. Dens elementer kaldes for punkterne i den ikke-Euklidiske geometri. Enhver halvcirkelbue som har centrum på  $x$ -aksen og ligger helt i  $H$  kaldes en ikke-Euklidisk linje. Det samme gælder en halvlinje som er vinkelret på  $x$ -aksen. Det er oplagt hvad der skal forstås ved at punkt ligger på linje og at linje skærer linje.*

---

Vi vil ikke give en egentlig indføring i ikke-Euklidisk matematik, men nøjes med nogle uformelle antydninger. Det er nemt at se at parallelaksiomet ikke gælder. På figur Figur 2 ses den (ikke-Euklidiske) linje  $l$  (sort) og punktet  $P$ . De to linjer  $m$  (rød) og  $n$  (blå) ses at være parallelle med  $l$  og gå gennem  $P$ . Du kan selv overbevise sig om at der er uendelig mange ikke-Euklidiske linjer med denne egenskab, måske endda angive en karakteristisk egenskab for dem.



*Figur 2. Gennem punktet  $P$  går der mange parallelser til linjen  $l$ . De blå punkter ligger (ikke-Euklidisk) ækvidistant*

Den sædvanlige geometri handler også om måling af længder og vinkler. Grundlæggende bygger dette på at man kan udnævne et enkelt linjestykke til at være en målestok, som kan flyttes rundt. Derfor hænger flytning og måling nøje sammen. En flytning er (i moderne forstand) en afbildning af planen på sig selv med den egenskab at afstanden mellem billederne af to punkter er den samme som afstanden mellem punkterne selv. F.eks. parallelforskydninger. Og drejninger. Et af Euklids aksiomer siger da også at to radier i samme cirkel er lige lange.

I 1872 revolutionerede *Felix Klein* geometrien ved at tage udgangspunkt i flytningerne. Flytningerne er det fundamentale som er givet på forhånd, og resten af geometrien, herunder måling, defineres ud fra dem. Dette giver anledning til flere nye typer geometri.

Den såkaldt elliptiske geometri udspiller sig på en kugleoverflade, linjerne er storcirkler og flytningerne er de drejninger som drejer kuglen over i sig selv. Afstanden mellem to punkter er længden af den korteste bue mellem dem på den storcirkel. I denne geometri findes slet ikke parallelle linjer.

Lad os nu vende tilbage til *Poincarés* udgave af den ikke-Euklidiske geometri, en såkaldt *hyperbolsk geometri* for at se hvad der er flytninger her. Vi forventer naturligvis at en flytning skal føre en linje (i denne geometri) over i en af samme type. Da de ikke-Euklidiske linjer er sædvanlige cirkler behøver det ikke at komme som en overraskelse at en flytning er en homografisk transformation. Ikke alle homografier er imidlertid flytninger. Man må kræve at homografien afbilder den ikke-Euklidiske plan over i sig selv. Det kan vises at dette netop svarer til de homografier som kan skrives udelukkende med reelle koefficienter.

Det tilhørende afstandsbegreb er mindre intuitivt. De to punkter  $x + iy_1$  og  $x + iy_2$  på samme lodrette linje har afstanden  $|\log(y_2/y_1)|$ .

Lad os se at dette ikke er helt så skørt. Vi betragter punkterne  $z_n = x + iy_n$ ,  $y_n < y_{n+1}$  på samme lodrette linje og antager at de ligger ækvidistant. Dette betyder at  $\log(y_{n+1}/y_n) = \log(y_n/y_{n-1})$  og ved fortsat anvendelse fås at

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{y_n}{y_{n-1}} = \dots = \frac{y_2}{y_1} = k$$

og derfor

$$y_{n+1} = ky_n = k^2 y_{n-1} = k^n y_1.$$



Punkternes indbyrdes euklidiske afstand til det første punkt ligger derfor som tallene i en kvotientrække i modsætning til afstandene i den sædvanlige geometri, der giver en differensrække. Se Figur 2 E9

## 3: Komplekse tal og rumgeometri

---

### 3.1: Stereografisk projektion

---

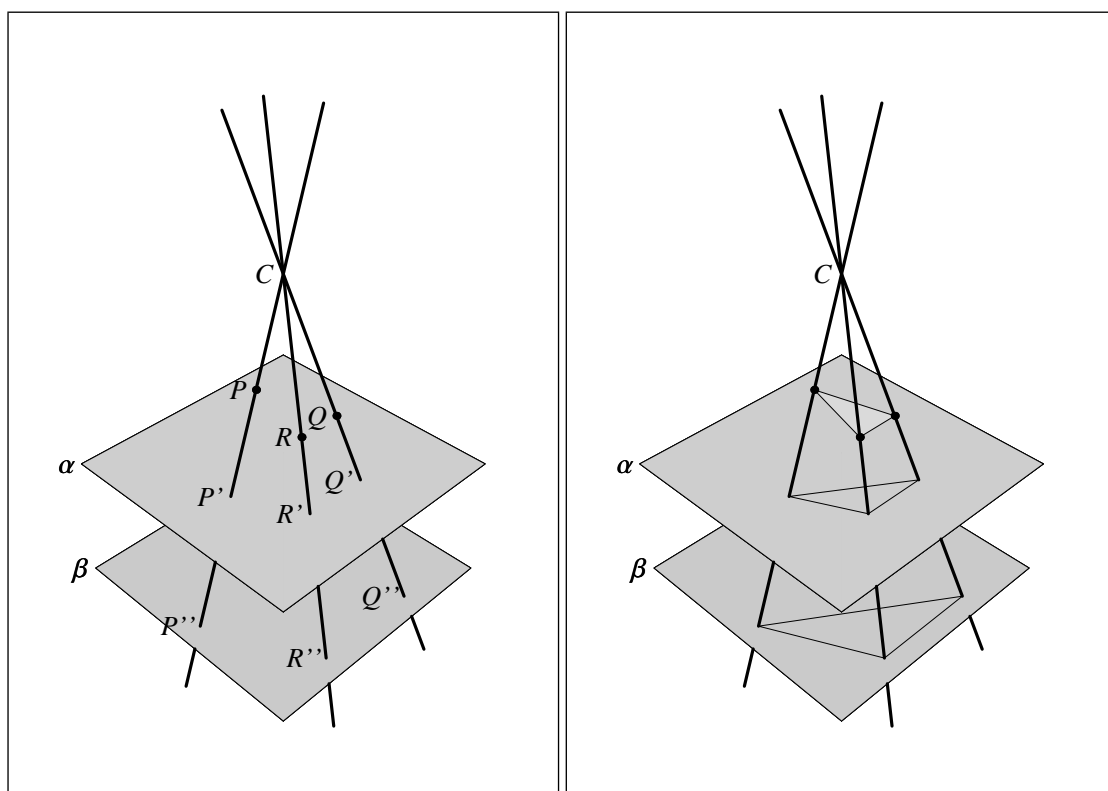
*Vi vil repræsentere drejninger ved homografier*

Vi vil studere den afbildning af en kugle (minus et enkelt punkt) på en plan som kaldes stereografisk projektion. Denne afbildning er kendt i kartografien som en måde at lave kort med, og benyttes især til mange typer søkort og til kort over polområderne. Ved hjælp af denne afbildning kan vi overføre studiet af matematiske fænomener på en kugle til fænomener i planen. Vi vil benytte dette til at studere drejninger rummet, da disse på oplagt måde er bestemt ved deres virkning på en kugle med centrum på akse. Når vi yderligere opfatter planen som de komplekse tal vil drejningerne komme til at svare til homografiske transformationer. Derved kan regninger med drejninger repræsenteres ved regninger med homografier og disse kan jo igen foretages ved regning med komplekse matricer.

Vi indleder fremstillingen med nogle geometriske betragtninger, som skal tjene som uformel baggrund for den egentlige fremstilling, som vil være rent algebraisk.

*Centralprojektion*

Den stereografiske projektion er et specialtilfælde af den såkaldte centralprojektion. Til en sådan skal der være givet en plan  $\alpha$ , kaldet projektionsplanen og et punkt  $C$ , kaldet centrum for projektionen. For et vilkårligt punkt  $P$  i rummet betragtes linjen gennem  $P$  og  $C$ . Hvis denne linje skærer  $\alpha$  i punktet  $P'$  siger vi at  $P'$  er fremkommet ved projektion  $P$  på  $\alpha$  ud fra  $C$ . De punkter, som ligger i en plan gennem  $C$ , parallel med  $\alpha$ , har ikke nogen projektion, mens alle andre netop har en projektion. Ethvert punkt i  $\alpha$  er projektion af uendelig mange punkter. Man kan gøre dette anskueligt ved at tænke på projektionsplanen,  $\alpha$ , som en tegneplan og projektionscentret som "det" punkt, hvor tegnerens øje er placeret.



Figur 3. Til venstre projektionen af tre punkter på to forskellige parallelle planer. Til højre projektionen af en trekant. Det ses at de to projektioner er ligedannede, den ene er en forstørrelse af den anden.

Projektionen på en anden plan  $\beta$ , som er parallel med den givne  $\alpha$ , kan nemt beregnes ud fra projektionen på  $\alpha$ . Lad os for simpelhedens skyld tænke os et koordinatsystem i hver plan, således at akserne i  $\alpha$  projiceres i akserne i  $\beta$ . Da vil koordinatsættet for projektionen på  $\beta$  fremgå af koordinatsættet for projektionen på  $\alpha$  ved multiplikation med en bestemt faktor. Det vil sige at billedet i den ene tegneplan er en forstørrelse af billedet i en anden, hvis de to tegneplaner er parallelle. Det spiller altså ikke den store rolle hvilken af indbyrdes parallelle planer vi vælger som projektionsplan.

### *Stereografisk projektion som instans af centralprojektion*

Hvis vi nøjes med at betragte punkter der ligger på en kugleoverflade  $S$  og vi antager at  $C$  ligger på kugleoverfladen, så vil ethvert punkt på  $S$ , bortset fra  $C$  svare til netop en projektion og ethvert punkt i  $\alpha$ , vil være projektion af netop et punkt. Lad os yderligere antage at planen er vinkelret på den akse for  $S$  som går gennem  $C$ . (Ved en akse for en kugleoverflade forstås en linje gennem centrum.) Det er denne afbildning af kuglen, på nær projektionspunktet, på planen som kaldes stereografisk projektion. Man får den bekvemteste illustration, hvis man benytter tangentplanen til modpolen af  $C$  som projektionsplan. Man

får de bekvemmeste regninger hvis man benytter den hermed parallelle plan gennem centrum.

For en given kugle kan vi vælge et koordinatsystem, således at den er enhedskuglen heri. Med disse uformelle betragtninger er vi forberedt på følgende definitioner, som er rent algebraisk og uafhængig af de gjorte betragtninger:

*Formelle definitioner af stereografisk projektion*

---

## 17. Definition: Den to-dimensionale kugleoverflade

---

Med  $\mathbb{S}^2$ , udtalt *s to*, menes den to-dimensionale sfære, hvilket er det samme som enhedskugleoverfladen i  $\mathbb{R}^3$ , altså mængden

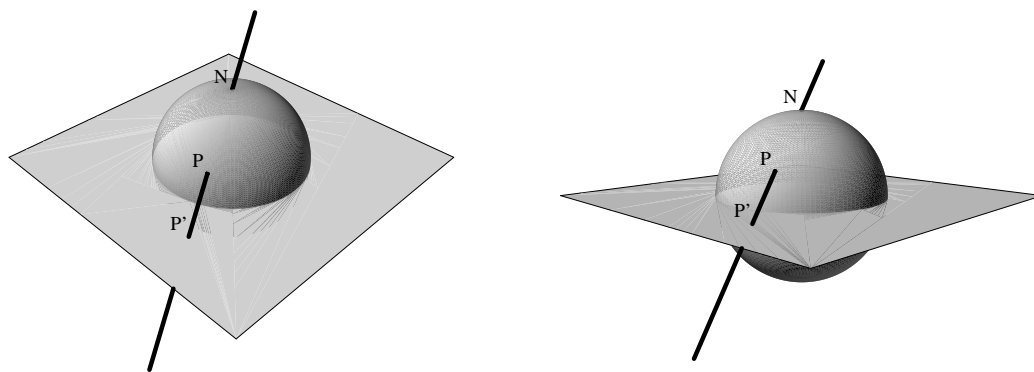
$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Punktet  $N = (0, 0, 1)$  kaldes nordpolen,  $S = (0, 0, -1)$  sydpolen. Koordinatplanet udspændt af  $x$ -akse og  $y$ -akse kaldes ækvatorplanet og dets skæring med  $\mathbb{S}^2$  kaldes ækvator. På lignende måde defineres  $x$ -meridianplanet som det plan som udspændes af  $x$ - og  $z$ -akse. Dette plans skæring med  $\mathbb{S}^2$  kaldes  $x$ -meridianen. Tilsvarende defineres med  $y$  i stedet for  $x$ .

---

## 18. Bemærkning : Hvorfor 2

Tallet 2 er valgt fordi kugleoverfladen "i sig selv" er todimensional, selvom den befinder sig i et tredimensionalt rum



Figur 4. Stereografisk projektion, set i to perspektiver. Punkt  $P$  på sfæren projiceres i punktet  $P'$  i ækvatorplanet.  $N$  er nordpolen, som der projiceres fra

## 19. Sætning: Forberedelse til definition af stereografisk projektion

---

For ethvert punkt  $P$  på  $\mathbb{S}^2$  forskelligt fra nordpolen vil linjen gennem  $P$  og nordpolen skære ækvatorplanet i netop et punkt  $P'$ . Hvis  $P = (x, y, z)$  da er

$$P' = \frac{1}{(1-z)}(x, y, 0).$$

Ethvert punkt  $P' = (u, v, 0)$  i ækvatorplanet vil være skæringspunkt svarende til netop et punkt  $P$  på  $\mathbb{S}^2$  nemlig

$$P = \frac{1}{u^2 + v^2 + 1}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)$$

---

Bevis : Linien fra nordpolen gennem  $P$  har parameterfremstillingen

$$t \mapsto (u, v, w) = (0, 0, 1) + t((x, y, z) - (0, 0, 1)),$$

og når denne kombineres med ligningen  $w = 0$  fås den angivne løsning. Heri benyttes at  $1 - z > 0$ .

Hvis  $P' = (u, v)$  er givet som projektion af  $P = (x, y, z)$  må  $(x, y, z)$  opfylde betingelserne i den første række af følgende kæde af udsagn. Det ses at de enkelte rækker er indbyrdes ækvivalente, og den sidste række indeholder netop betingelsen i sætningen:

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{1-z}, \quad v = \frac{y}{1-z}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \neq 1; \\ x &= u(1-z), \quad y = v(1-z), \quad x^2 + y^2 = 1 - z^2, \quad 1 - z \neq 0; \\ x &= u(1-z), \quad y = v(1-z), \quad (u^2 + v^2)(1-z)^2 = 1 - z^2, \quad 1 - z \neq 0; \\ x &= u(1-z), \quad y = v(1-z), \quad (u^2 + v^2)(1-z) = 1 + z, \quad 1 - z \neq 0; \\ x &= u(1-z), \quad y = v(1-z), \quad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}, \quad 1 - z = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}; \\ x &= \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}. \end{aligned}$$

---

## 20. Definition: Stereografisk projektion

---

Punktet  $P'$  kaldes den. stereografiske projektion af punktet  $P$

---

Stereografisk projektion er interessant fordi den bevarer to vigtige geometriske egenskaber. Den er cirkelbevarende og vinkelbevarende. Dette er næsten så godt som man kan få det, når det hedeste ønske, en afstandsbevarende projektion er en uopfyldelig drøm. Hvorfor den er uopfyldelig kommer vi ikke ind på her.

Vi nøjes med at formulere

## **21. Sætning: Stereografisk projektion er cirkelbevarende**

---

*Den stereografiske projektion af en cirkel på sfæren er en cirkel (i udvidet forstand) i ækvatorplanet.*

---

idet beviset overlades til læseren som Ø10

*Stereografisk billede af regulære polyedre*

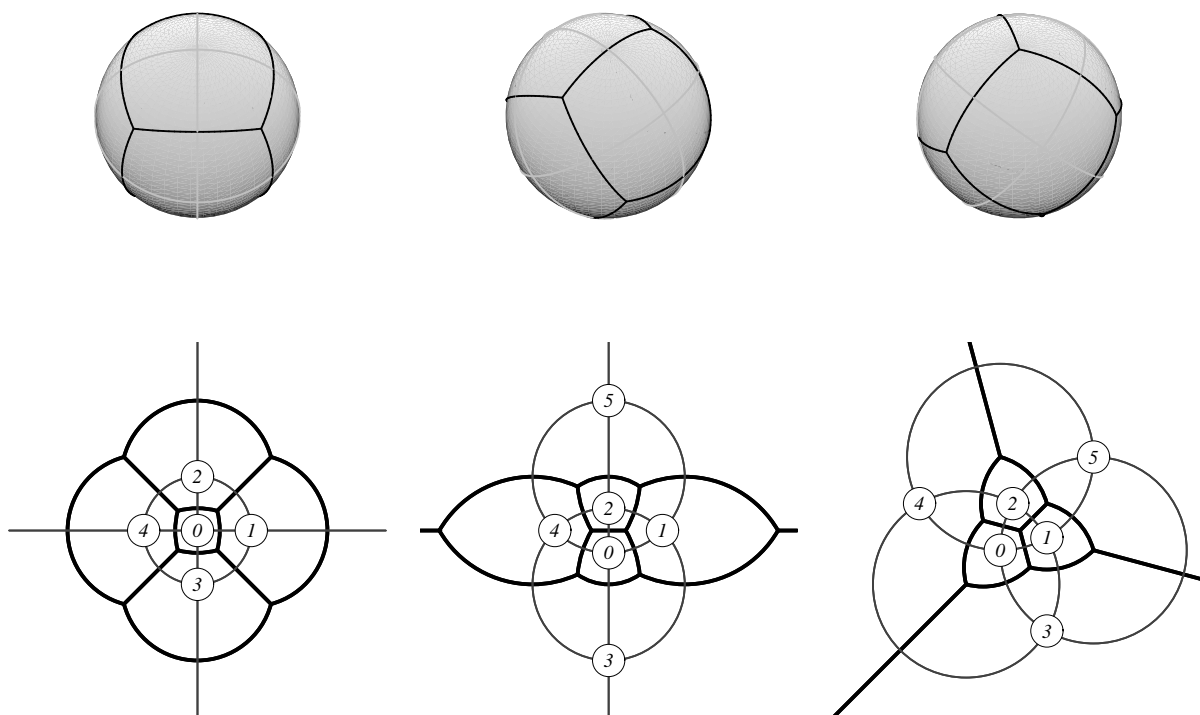
Stereografisk projektion er velegnet til at lave billeder af strukturer på en kugle.

Først anbringer vi et vist legeme, således at det har enhedskuglen som sin omskrevne kugle, hvilket vil sige at hjørnerne ligger på kugleoverfladen.

Dernæst projiceres kanterne op på kugleoverfladen ud fra centrum. Forestil dig at kuglen er mat og gennemsigtig, at legemet er et trådnet af dets kanter og at en lampe er anbragt i centrum. Træk skyggerne på kuglen op med en bred tuschpen.

Endelig projicerer vi så det billede, som på denne måde er dannet på kuglen, ned på tangentplanet i sydpolen med en stereografisk projektion. Her skal man forestille sig en lampe anbragt i nordpolen som kaster en skygge på tangentplanen.

Den derved fremkomne figur viser sig efter lidt tilvænning at være bekvem at arbejde med, når man ønsker at få overblik over hvordan drejningerne virker på sider, kanter og hjørner. På Figur 5 ses netbillederne på kugleoverfladen og i tangentplanet for en terning, som er anbragt på forskellige måder, nemlig med henholdsvis et sidemidtpunkt, et kantmidtpunkt og et hjørne i nordpolen.



Figur 5. Netbillede af en terning ved centralprojektion (øverste række) af dette billedes stereografiske projektion (nederste række). Nordpolen, hvor projektionsplanet rører, er anbragt henholdsvis i centrum af en side, midtpunktet af en kant og i et hjørne. Det associerede oktaeder optræder med en spag streg.

### 3.2: Stereografisk projektion i komplekse koordinater

*De komplekse tal kommer ind på scenen*

#### 22. Definition: Stereografisk projektion på den komplekse plan

Vi benytter også betegnelsen *stereografisk projektion* for den afbildning af  $\mathbb{S}^2$  ind i  $\mathbb{C}^*$ , som til et punkt forskelligt fra nordpolen knytter  $u + iv$ , hvor  $(u, v, 0)$  er den stereografiske projektion af punktet, og som til nordpolen knytter  $\infty$ . Der er simpelt hen tale om at identificere ækvatorplanet med  $\mathbb{C}$ .

Den stereografiske projektion giver anledning til en bijektion mellem kugleoverfladen og den udvidede komplekse plan. Dette giver mulighed for at benytte planen som et kort over kugleoverfladen.

Det er imidlertid også nyttigt at tænke på kugleoverfladen som en billede af den komplekse plan. Når vi tænker på kuglen på denne måde taler vi om den som Riemann-kuglen.

---

### 23. Definition: Riemann kuglen

---

*Ved Riemann kuglen forstås  $\mathbb{S}^2$  udstyret med al den struktur vi har på  $\mathbb{C}^*$  ført over fra  $\mathbb{C}^*$  ved hjælp af invers stereografisk projektion.*

*Vi får ikke brug for topologiske betragtninger her, men vi kan tilføje at man sædvanligvis også forsyner Riemann kuglen med den topologi som  $\mathbb{S}^2$  har i forvejen fra den naturlige metrik, storcirkelbuelængden, eller delrumsmetrikken fra den sædvanlige metrik på rummet.*

*Dette er interessant fordi man på denne måde får  $\mathbb{C}^*$  udstyret med en topologi ved at tilbageføre metrikken på  $\mathbb{S}^2$  til  $\mathbb{C}^*$  ved stereografisk projektion.*

---

### 24. Sætning: Geografi på Riemann kuglen

---

*Ved stereografisk projektion vil Ækvator svare til enhedscirklen, den sydlige halvkugle til det indre af enhedscirklen og den nordlige til det ydre. Sydpolen er 0 og nordpolen er  $\infty$ . Hvis vi angiver meridianerne ved sædvanlig geografisk længde med længden målt på ækvator imod uret og med  $(1, 0, 0)$  som en slags Greenwich, altså udgangspunkt for vinkelmålingen, så vil  $x$ -aksen svare til 0-meridianen mens  $y$ -aksen svarer til 90 graders meridianen. De to koordinataksler møder hinanden i 0 og i  $\infty$ . De øvrige meridianer vil svare til de rette linjer gennem 0.*

---

Vi vil nu beskrive drejninger som fører sfæren,  $\mathbb{S}^2$ , over i sig selv ved hjælp af afbildninger, som fører  $\mathbb{C}^*$  over i sig selv. Jeg vil allerede nu glæde læseren med udsigten til at det kommer til at dreje sig om homografiske transformationer. Vi vil begynde med at indføre lidt til dette formål bekvem terminologi.

*De komplekse tal til rumbeskrivelse*

---

### 25. Definition: Halvkomplekse koordinater i rummet

---

*For et punkt  $(u, v, h)$  i rummet vil vi kalde talsættet  $(u + iv, h)$  for punktets halvkomplekse koordinatsæt. Vi vil kalde  $u + iv$  for dets plankoordinat og  $h$  for dets højde.*

---

### 26. Sætning: Stereografisk projektion i halvkomplekse koordinater

---



Den stereografiske projektion  $S$  og dens inverse  $S^{-1}$  er i halvkompleske koordinater givet ved formlerne

$$S(w, h) = \frac{w}{1-h}, \quad S^{-1}(z) = \left( \frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$$

---

*Bevis :* Følger ved anvendelse af de tidligere formler S19 for stereografisk projektion i sædvanlige koordinater kombineret med definitionen af halvkompleske koordinater.

### 3.3: Stereografisk konjugerede afbildninger

---

Ordet konjugeret benyttes mange steder i matematikken om en relation mellem to objekter som er særlig tæt knyttet til hinanden, danner par, på nogle sprog endda betyder at de er gift. Vi skal indføre en sådan pardannelse mellem en afbildning af kuglen ind i sig selv og en afbildning af planen ind i sig selv:

---

#### 27. Definition: Stereografisk konjugerede afbildninger

---

Vi siger om et par  $f, g$  af afbildninger  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ ,  $g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  at de er stereografisk konjugerede med hinanden hvis følgende ensbetydende betingelser er opfyldt

$$f = S^{-1} \circ g \circ S, \quad g = S \circ f \circ S^{-1} \quad S \circ f = g \circ S.$$


---

#### 28. Sætning: Betingelser for konjugering

---

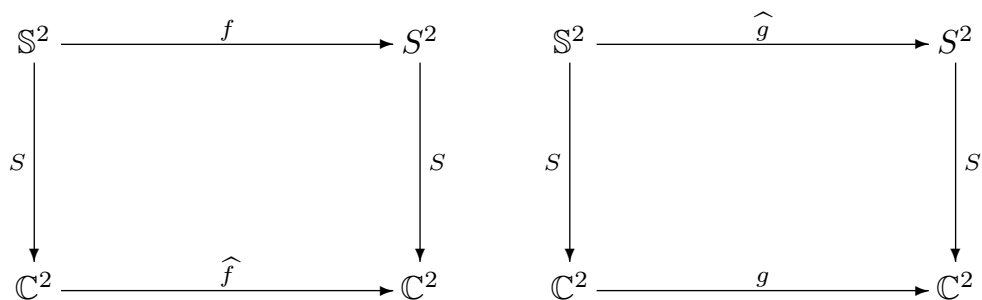
Til enhver afbildning  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  findes der netop en afbildning  $g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  som den er konjugeret med. Denne afbildning kalder vi  $\hat{f}$ .

Tilsvarende findes til enhver afbildning  $g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  netop en afbildning  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  som den er konjugeret med. Denne afbildning kalder vi  $\hat{g}$ .

Der gælder at afbildningen  $f \mapsto \hat{f}$  er en bijektiv afbildning af mængden  $\mathcal{F}(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$  på mængden  $\mathcal{F}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ . Her betegner  $\mathcal{F}(X, X)$  mængden af afbildninger af en mængde  $X$  ind i sig.

Afbildningerne  $f \mapsto \hat{f}$  og  $g \mapsto \hat{g}$  er hinandens inverse og  $\widehat{\hat{f}} = f$ .

Forholdene er illustreret i følgende kommutative diagram:




---

29. Bemærkning : Minder om formelen for koordinater i vektorrum

Der gælder lignende formler, når  $S$  er koordinatafbildning af et vektorrum ind i  $\mathbb{R}^n$  og  $f$  er en lineær afbildning. Da er den konjugerede  $\widehat{f}$  udtrykket for  $f$  i koordinater. Det er da også ret oplagt at definere et helt generelt konjugeringsbegreb, hvoraf de to her betragtede er specialtilfælde.

---

### 30. Sætning: Konjugering respekterer sammensætning

---

For  $f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$  med invertibel  $f$  har vi at

$$\widehat{f_1 \circ f_2} = \widehat{f_1} \circ \widehat{f_2}, \quad \widehat{f^{-1}} = \widehat{f}^{-1}.$$

---

*Bevis : Overlades til læseren.*

Vi tager en sætning som tjener som et simpelt eksempel på konjugering, men som også straks skal bruges.

---

### 31. Sætning: Konjugering af modpolsafbildningen

---

Hvis  $f$  er afbildningen der til  $x$  knytter det diametralt modsatte punkt  $-x$ , da er  $\widehat{f}(z) = -\frac{1}{\bar{z}}$

---

*Bevis : Vi regner bare løs:*

$$\begin{aligned} S(f(S^{-1}(z))) &= S\left(f\left(\frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)\right) = S\left(-\frac{2z}{|z|^2+1}, -\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \\ &= \frac{-\frac{2z}{|z|^2+1}}{1 - \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1}} = \frac{-\frac{2z}{|z|^2+1}}{\frac{2|z|^2}{|z|^2+1}} = -\frac{z}{|z|^2} = -\frac{z}{z\bar{z}} = -\frac{1}{\bar{z}} \end{aligned}$$

Efter denne introduktion til hvordan man kan behandle afbildninger i rummet ved hjælp af afbildninger i planen via stereografisk konjugering, er vi så klar til det resultat, som jeg har stilet efter og som er hovedpointen i dette hæfte om homografier.

### 3.4: Stereografisk konjugering af drejning i rummet

---

*Drejninger er konjugerede med homografier*

#### 32. Sætning: Drejninger er konjugerede med homografier

---

*Enhver drejning  $D$  af kuglen er stereografisk konjugeret med en homografisk transformation. Hvis den positive del af akse for  $D$  går gennem punktet  $x = (w, h) = (u + iv, h)$  og drejningsvinklen er  $\varphi$  da er en matrix  $A$  for  $\hat{D}$  givet ved*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \cos \frac{\varphi}{2} + ih \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \beta = iw \sin \frac{\varphi}{2}.$$

*For denne matrix gælder at  $\det A = 1$*

---

*Bevis : Vi vil ikke vise formelen i sin helhed, da det bygger på avancerede metoder som vil føre for vidt her.*

*Vi nøjes da med at bevise det specielt tilfælde hvor drejningsaksen er hovedaksen, hvorved menes linjen gennem nordpol og sydpol. Det er ret oplagt at denne drejning i halvkompleske koordinater er givet ved formelen  $D(w, h) = (e^{i\varphi}w, h)$  og det er ikke vanskeligt at beregne at  $\hat{D}(z) = e^{i\varphi}z$ , hvilket jo oplagt er en homografisk transformation.*

*Vi vil så vise at vi også kommer til dette resultat ved at benytte formelen i sætningen. Aksepunktet kan vælges som nordpolen,  $(0, 0, 1)$ , hvilket giver*

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad \beta = 0 \\ A &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Denne matrix får ved multiplikation med  $e^{i\frac{\varphi}{2}}$  en form, hvoraf det nemt ses at den svarer til den allerede fundne formel for  $\hat{D}$ .

### *Drejninger om koordinataksene*

Det er nyttigt at se formelen i brug i nogle simple og velkendte drejninger, taget fra terningens drejningsgruppe. Dette er gjort i en række eksempler E11 (90° om  $z$ -aksen), E12 (90° om  $x$ -aksen), E13 (90° om  $y$ -aksen), E14 (120° om  $(x = y = z)$ -aksen).

Fidusen med denne sætning er at man kan flytte opgaver der handler om sammensætning af drejninger i rummet til opgaver der vedrører multiplikation af matricer. Man skal naturligvis kunne flytte resultaterne om matricerne tilbage til at være resultater om drejningerne. Man skal altså for (visse) matricer kunne bestemme hvilken drejning den hidrører fra.

Hvad der kan lade sig gøre er indholdet i næste sætning. Inden vi formulerer den, er det praktisk med en

---

### **33. Definition: U-matrix**

---

Antag at  $A$  er en matrix af formen

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

og opfylder betingelsen  $\det A = 1$ . Da siger vi at  $A$  er en  $U$ -matrix

---

Betegnelsen  $U$ -matrix er ikke gængs. Du vil sandsynligvis støde på denne type matricer andetsteds, da de er vigtige i den lineære algebra, hvor de kendes som *unitære* matricer. Det spiller ingen rolle i vores sammenhæng.

---

### **34. Sætning: Metode til at finde den konjugerede drejning**

---

Antag at  $A$  i D33 er en  $U$ -matrix. Da findes en drejning som er stereografisk konjugeret med den homografi, som har  $A$  som matrix.

Hvis  $\alpha = \pm 1$  er  $A = \pm E$  hvor  $E$  er enhedsmatricen. Ellers kan en kombination af drejningsvinkel  $\varphi$  og et punkt,  $(w, h)$ , på enhedskuglen til bestemmelse af aksens findes ved at udføre følgende trin:

- 1) Skriv  $\alpha = a + ib$
- 2) Bestem en løsning  $\varphi$  til  $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = a$
- 3) Bestem en løsning  $h$  til  $h \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = b$
- 4) Bestem en løsning  $w$  til  $\beta = iw \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

---

*Bevis : Vi bemærker først at*

$$1 = \det A = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

*Vi bemærker dernæst at algoritmen altid kan udføres: Vi bemærker at da  $\alpha \neq \pm 1$  er også  $a \neq \pm 1$ .*

*Ligningen i trin 2 er en elementær trigonometrisk ligning, og resultatet  $\varphi$  kan indsættes i ligningerne i trin 3 og 4, som herefter er simple lineære ligninger i  $h$  og  $w$ , idet  $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \neq 0$ .*

*Vi skal bevise at  $(w, h)$  ligger på enhedscirklen. Vi omdanner ligningen*

$$1 = \det A = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + h^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + |w|^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

*til*

$$(h^2 + |w|^2) \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

*hvoraf påstanden  $h^2 + |w|^2 = 1$  kan udledes.*

Lad os resumere situationen.

Til enhver drejning kan vi konstruere en entydigt bestemt homografi, nemlig den stereografisk konjugerede. Men det er ikke enhver homografi som kan fås på denne facon. Dem, som kan, kalder vi lige et øjeblik for drejningshomografier.

Vi har en opskrift på hvordan vi finder en U-matrix for en drejning, S32, og en opskrift på hvordan vi finder en drejning som svarer til en give U-matrix S34.

Det kan give en vis frihed ikke kun at skulle arbejde med U-matricer. Derfor er det nyttigt at vide, hvornår en matrix svarer til en drejning, og hvordan man i så fald kan finde den.

Lad os (til lejligheden) sige at to matricer er homografiækvivalente, hvis de bestemmer den samme homografi. Det ses hurtigt, og vi har allerede tidligere bemærket, at proportionale matricer er homografiækvivalente. Det giver en vis flertydighed, men heldigvis stopper det også med det, der er ikke andre homografiækvivalente. Vi overlader beviset, som *ikke* er helt trivielt, til læseren, Ø15. Hver klasse af homografiækvivalente matricer består altså af indbyrdes proportionale matricer. Af disse vil netop to opfylde betingelsen  $\det A = 1$ .

Hvis nemlig  $B = kA$ , da vil  $\det B = k^2 \det A$ . Hvis vi vælger  $k$  således at  $k^2 \det B = 1$ , da vil altså  $\det A = 1$ .

Vi kan vælge de repræsentanter for klasserne som passer os bedst, dvs gør regningerne lettest, da den klasse vi havner i ved multiplikationen er uafhængig af repræsentanterne.

Men hvis vi vil benytte opskriften (S34) på at komme tilbage til homografiland skal vi huske at normere, således at vi får en U-matrix. Ø16

Vi kan bruge de allerede gennemgåede eksempler til at se hvordan denne algebra fungerer. E17

## 4: Spejlinger og inversioner

---

### 4.1: Inversioner

---

Vi har gjort os bekendt med at (visse) homografiske transformationer i den (udvidede) komplekse plan korresponderer med drejningerne af enhedskuglen, altså alle drejninger med akse gennem begyndelsespunktet.

Nu er der jo også andre interessante afbildninger der ligesom drejningerne er afstandsbevarende, fx spejlinger. Hvad kan vi da sige om de spejlinger som fører enhedskuglen over i sig selv. Hvad svarer de til ved stereografisk konjugering. Kan vi finde en pendant til homografierne ?

Svaret er ja, men vi venter lidt med begrundelsen. Vi mangler nemlig også på anden måde noget til at spille rollen som spejlinger i forhold til homografierne. I rummet er der stor forskel på spejlinger og drejninger, hvad angår deres fixpunktmængde. Drejningernes fixpunktmængde er en linje og spejlingernes er en plan, og denne skærer sfæren i en cirkel. Den stereografisk konjugerede til en spejling må derfor have en cirkel som sin fixpunktmængde.

Nu kan man hurtigt overbevise sig om at en homografi har 0, 1 eller 2 fixpunkter idet fixpunkt ligningen kan omformes til en ligning af højst anden grad, idet

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z \Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Så vi efterlyser altså afbildninger, der har en cirkel som fixpunktmængde.

Det glædelige budskab er at vi får begge formål opfyldt med samme nye begrebsdannelse: inversioner af den udvidede komplekse plan. Vi går ikke lige på definitionen men starter med et par sonderinger.

### 35. Sætning: De simpleste spejlinger

---

Lad  $P_X$  betegne den plan som skærer enhedscirklen i den cirkel, som ved stereografisk projektion havner i  $x$ -aksen, kort sagt planen  $y = 0$ . Lad videre  $T_X$  betegne spejlingen i  $P_X$ . Tilsvarende defineres  $P_Y$  og  $T_Y$ .

Planen med ligningen  $z = 0$  indeholder enhedscirklen og kaldes derfor  $P_E$  og spejlingen i den kaldes  $T_E$ .

Vi har da at

$$\widehat{T_X}(z) = \bar{z}$$

$$\widehat{T_Y}(z) = -\bar{z}$$

$$\widehat{T_E}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

---

Bevis : Vi bemærker først at  $T_X(w, h) = (\bar{w}, h)$ ,  $T_Y(w, h) = (-\bar{w}, h)$  og  $T_Z(w, h) = (w, -h)$ . På dette grundlag kan vi beskrive virkningen af den øverste og de to lodrette pile i nedenstående diagrammer:

$$\begin{array}{ccc} (w, h) & \xrightarrow{T_X} & (\bar{w}, h) \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ w & \xrightarrow{\widehat{T_X}} & \bar{w} \\ \frac{w}{1-h} & & \frac{\bar{w}}{1-h} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (w, h) & \xrightarrow{T_Y} & (-\bar{w}, h) \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ w & \xrightarrow{\widehat{T_Y}} & -\bar{w} \\ \frac{w}{1-h} & & \frac{-\bar{w}}{1-h} \end{array}$$

Heraf aflæses  $\widehat{T_X}(z) = \bar{z}$  og  $\widehat{T_Y}(z) = -\bar{z}$ .

Den sidste formel udregnes ved beregning af  $ST_E S^{-1}$ . Da en lignende regning optræder ovenfor overlades den til øvelse.

Simplere kunne det jo næsten ikke være, dels når vi ser på udtrykkene, dels når vi ser at vi får spejlingen i  $x$ -aksen og i  $y$ -aksen. Den sidste er måske ikke helt så oplagt, men ikke desto mindre svarer den til en klassisk operation kaldet inversion i enhedscirklen.

### 36. Sætning: Forberedelse til næste definition

---

Lad  $O$  betegne centrum i cirklen  $C$  med radius  $r$  og lad  $P$  være et punkt forskelligt fra  $O$ . Da findes der netop et punkt  $P'$  som ligger på halvlinjen med endepunkt i  $O$  og gående gennem  $P$  og som opfylder relationen  $|OP||OP'| =$

$r^2$ . Hvis der er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt i  $O$  i forhold til hvilket  $C$  er en enhedscirkel, og hvis  $P$  i forhold hertil har den komplekse koordinat  $z$ , da vil  $P'$  have koordinaten  $\bar{z}^{-1}$ .

---

*Bevis:* Eksistens og entydighed er oplagt i den generelle situation. Vi betragter så den specielle situation, hvor der er tale om enhedscirklen. Idet  $z'$  betegner koordinaten for  $P'$  har vi at der må findes et positivt tal  $\alpha$  således at  $z' = \alpha z$ . Vi har så at  $|OP| = |z|$ ,  $|OP'| = |z'|$ , og følgelig at  $|z'| |z| = 1$ . Vi slutter da at  $|z'| = 1/|z|$ , der giver anledning til følgende

$$\begin{aligned}\frac{1}{|z|} &= \alpha |z| \\ \alpha &= \frac{1}{|z|^2} \\ z' &= \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}\end{aligned}$$


---

### 37. Definition: Inversion i en cirkel

---

Det i følge foregående sætning entydigt bestemte punkt  $P'$  siges at være fremkommet af  $P$  ved inversion i den givne cirkel.

---

Den her nævnte geometriske definition af inversion i en cirkel er alle medtaget her af veneration for historien. Vi vælger følgende enklere definition der afspejler at man i rummet kan få samtlige spejlinger ud fra en enkelt ved at lade denne efterfølge af en drejning:

---

### 38. Definition: Inversion

---

Ved en inversion af  $C^*$  forstås en sammensætning af en homografi med inversionen  $z \mapsto \bar{z}$ , altså en afbildning af formen

$$i(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$


---

## 4.2: Spejlinger i rummet og inversioner i planen

---

### 39. Sætning: Spejlinger er konjugerede med inversioner

---



Hvis  $T$  er en spejling af rummet, som fører enhedskuglen i sig selv, da er  $\widehat{T}$  en inversion i af formen

$$i(z) = \frac{\gamma\bar{z} + \delta}{\delta\bar{z} + \bar{\gamma}},$$

idet  $\gamma$  og  $\delta$  er bestemt af formlerne

$$\gamma = \alpha^2 + \bar{\beta}^2, \quad \delta = \alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta},$$

hvor  $\alpha$  og  $\beta$  er de koefficienter der hører til den homografi som svarer til den drejning som fører spejlingsplanet for  $T$  over i  $x$ -meridianplanet.

---

*Bevis :* Lad  $D$  være den drejning som fører spejlingsplanet  $P_T$  hørende til  $T$  over i  $P_X$ , spejlingsplanet hørende til  $T_X$ , altså  $D(P_T) = P_X$ . Vi kan da se at  $DT_XD^{-1}$  er en spejling som har  $P_T$ , som fixpunktmængde, nemlig ved en simpel inspektion: Lad  $r \in P_T$ , da vil  $D^{-1}(r) \in P_X$  og derfor er  $T_X(D^{-1}(r)) = D^{-1}(r)$ . Dermed må jo  $D(T_X(D^{-1}(r))) = D(V) = r$ , så at  $r$  er et fixpunkt som påstået. Men så er jo  $T = DT_XD^{-1}$ .

Heraf følger at  $\widehat{T} = \widehat{D}\widehat{T_X}(\widehat{D^{-1}})$ .

Vi ved fra tidligere at vi kan bestemme konstanterne  $\alpha$  og  $\beta$  således at

$$\widehat{D}(z) = \frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}$$

og vi kan nemt ved beregning af den inverse matrix checke at

$$\widehat{D^{-1}}(z) = \frac{\bar{\alpha}z + \bar{\beta}}{-\beta z + \alpha}$$

Vi har da at

$$\widehat{T_X}(\widehat{D^{-1}}(z)) = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{-\bar{\beta}\bar{z} + \bar{\alpha}}$$

så

$$\widehat{D}(\widehat{T_X}(\widehat{D^{-1}}(z))) = \frac{\gamma\bar{z} + \delta}{\delta\bar{z} + \bar{\gamma}}, \quad \gamma = \alpha^2 + \bar{\beta}^2, \quad \delta = \alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta}$$

(udfør selv mellemregningerne)

Det naturlige spørgsmål er så om enhver inversion fremkommer som stereografisk konjugeret med en spejling. Vi har imidlertid allerede set et eksempel som viser, at dette ikke er tilfældet, nemlig inversionen  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ , som vi i S31 beregnede som den konjugerede af modpolsafbildningen  $x \mapsto -x$ , der jo kan opfattes som en spejling i centrum.

Lad os kalde en inversion, hvis konjugerede afbilder sfæren på sig selv, for en sfæreinversion. Vi kan da karakterisere denne klasse af inversioner på følgende måde:

Hvis vi sammensætter en sfæreinversion afbildningen  $z \mapsto \bar{z}$  fås en homografisk transformation hvis stereografisk konjugerede er en drejning. Inversionens konjugerede er derfor en sammensætning af en drejning og en spejling. Den gruppe som er frembragt af homografierne og inversionerne er altså de konjugerede af den gruppe som er frembragt af drejninger og spejlinger. E18 E19

## 5: Epilog

---

Det gennemgående tema har været: Vi har to algebraiske strukturer  $A$  og  $B$  og en korrespondance mellem dem, som gør det muligt at flytte algebraiske opgaver fra  $A$  over i  $B$ , løse dem der og flytte resultatet tilbage til  $A$ . Vi kan også sige at vi kan benytte  $B$  som en model af  $A$ .

Der har indgået to slags strukturer:

I den ene er objekterne bijektive afbildninger af en mængde ind i sig selv og operationerne sammensætning og invertering

I den anden er objekterne invertible matricer og operationerne matrixmultiplikation og matrixinvertering.

Vi har mødt det overordnede tema i følgende konkrete gestalter:

- 1)  $A$  mængden drejninger om et fast punkt i planen.

$B$  er de komplekse tal (her er matrixmultiplikationen sædvanlig multiplikation).

Korrespondancen er at drejningen med vinkel  $\varphi$  svarer til  $e^{i\varphi}$ .

- 2)  $A$  er mængden af homografier.

$B$  er mængden af  $2 \times 2$  invertible matricer over de komplekse tal.

Til hver matrix hører en bestemt homografi

- 3)  $A$  er mængden af ikke-Euklidiske flytninger.

$B$  er mængden af homografier som bevarer den ikke-Euklidiske plan.

- 4)  $A$  er mængden af bijektive afbildninger af enhedskuglen på sig selv.

$B$  er mængden af bijektive afbildninger af den udvidede komplekse plan på sig selv.

Korrespondancen er stereografisk projektion

- 5)  $A$  er mængden af drejninger af enhedskuglen.

$B$  er en mængde af homografier

Korrespondancen er stereografisk projektion

- 6)  $A$  er mængden drejninger af enhedskuglen.

$B$  er en mængde af  $2 \times 2$  invertible matricer over de komplekse tal.

Korrespondancen opstår ved til en matrix at tilknytte en homografi og til denne en drejning.

*Eksempel 1: Beregning af værdier*

For

$$h(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

fås ved enkle regninger at  $h(1) = 0, h(0) = -1, h(-1) = \infty$ . Ved brug af det alternative udtryk

$$h(z) = \frac{1 - \frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}}$$

fås  $h(\infty) = 1$  og ved anvendelse af tricket med at forlænge med det konjugerede af nævneren fås videre at

$$\begin{aligned} h(i) &= \frac{i-1}{i+1} = \frac{(i-1)(-i+1)}{(i+1)(-i+1)} = \frac{2i}{2} = i, \\ h(-i) &= \frac{-i-1}{-i+1} = \frac{(-i-1)(i+1)}{(-i+1)(i+1)} = \frac{-2i}{2} = -i \end{aligned}$$

---

*Øvelse 2: Beregning af værdier*

Lav en tilsvarende tabel for  $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$

---

*Eksempel 3: Dobbeltforhold med  $\infty$*

$$\text{df}(u, \infty, x, y) = \frac{\frac{u-x}{\infty-x}}{\frac{u-y}{\infty-y}} = \frac{\frac{u-x}{1}}{\frac{u-y}{1}} = \frac{u-x}{u-y}$$

---

*Øvelse 4: Bevarelse af dobbeltforhold*

Lad  $f$  være afbildningen  $z \mapsto \frac{1}{z}$ . Lad  $(u, v, x, y) = (-1, 1, 2, i)$ . Eftersis resultatet om bevarelse af dobbeltforhold for dette sæt af punkter. Lad derefter  $(u, v, x, y) = (-1, 1, i, 0)$

---

*Øvelse 5: Udfyld detaljerne*

Udfyld detaljerne i beviset for sætningen om bevarelse af dobbeltforhold.

Tip: vi kan definere  $k, p, q$  således at

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} = k \frac{z + p}{z + q}$$
$$\frac{z + p}{z + q} = 1 + \frac{p - q}{z + q}$$

---

*Eksempel 6: Hvordan bestemmes matricen ?*

Vi kan give følgende opskrift til at finde en matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

for den i S13 anførte homografi. Dette gøre ved at omforme de tre betingelser til følgende ligningssystem:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & -xu & -u \\ y & 1 & -yv & -v \\ z & 1 & -zw & -w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

som, opfattet som ligningssystem i  $a, b, c, d$ , er lineært og har et løsningsrum hvis dimension er mindst 1.

Hvis  $\infty$  forekommer blandt de opgivne data kan og skal metoden modificeres.

---

*Øvelse 7: Cirkler og deres billeder*

Lad  $f$  være afbildningen  $z \mapsto \frac{1}{z}$ . Bestem billederne af de rette linjer gennem begyndelsespunktet og af cirklerne med centrum i begyndelsespunktet. Vælg selv flere cirkler og bestem deres billeder.

---

*Øvelse 8: En særlig gruppe af homografier*

Lad to homografier  $X$  og  $Y$  være givet ved  $X(z) = 1 - z$  og  $Y(z) = z^{-1}$ .

Det vil være instruktivt at

- 1) Bestemme hvor mange homografier der kan dannes af ord skrevet med de to bogstaver  $X$  og  $Y$ , idet sammensætning skrives med usynlig multiplikationstegn. Altså vil  $XYX$  stå for  $X \circ Y \circ X$ . Det vil være en endelig mængde som i det følgende kaldes  $G$ .
- 2) Vise at alle elementerne i  $G$  repræsenterer en permutation af mængden  $\{0, 1, \infty\}$ .

- 3) Tage stilling til hvordan man lettest løser punkt 1): direkte ved brug af definition, vha regning med matricer eller ved at regne med permutationer.
- 4) Tegne en figur, hvori følgende tre elementer indgår: Enhedscirklen, cirklen med radius 1 og centrum i 1 og linjen som går gennem cirklernes skæringspunkter, altså linjen bestående af alle punkterne med realdel  $1/2$ . Disse kurver deler planen i 6 områder. Derpå konstatere at hvert af elementerne i  $G$  afbilder et af disse områder på et af disse områder. Marker hvert af områderne med en angivelse af den afbildning som fører området længst til venstre over i det pågældende område. Udnyt af homografier fører cirkler i cirkler og områder begrænset af en cirkel i et område begrænset af en cirkel. Udnyt også at billedet af en cirkel kan bestemmes ved hjælp billederne af tre punkter på den.
- 5) Bestemme ordenen af hvert element i  $G$ .

*Eksempel 9: En fliselægning af den ikke-Euklidiske plan*

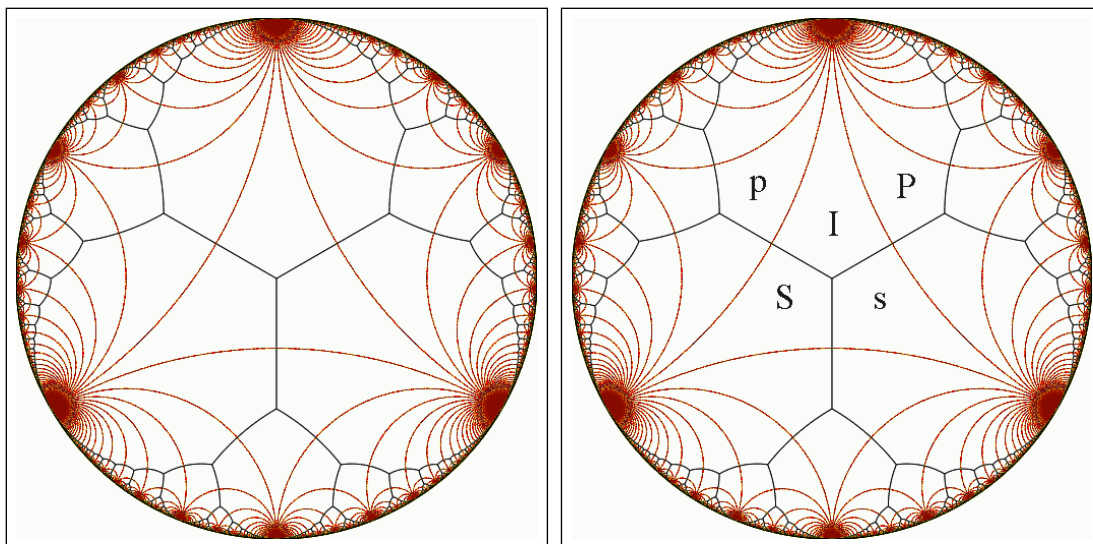
Vi vil i dette eksempel anvende en alternativ model af den ikke-Euklidiske plan, nemlig Poincarés cirkelmodel. Her består planen af punkterne inden for enhedscirkelns periferi og linjerne er der cirkler (i udvidet forstand) som står vinkelret på periferien. Denne model kan vises at være geometrisk ækvivalent med halvplansmodellen.

Men den giver lidt kønnere billeder. På Figur 3 ses et gyldentfarvet net af cirkelbuer der har deres endepunkter på cirkelperiferien. Dette svarer til et net af ikke-Euklidiske linjer, der er ubegrænsede. De inddeler cirkelskiven, altså den ikke-Euklidiske plan i områder, som er en slags trekanter, bortset fra at siderne er uendeligt lange og vinklerne er 0.

Vi kalder dem trekanter alligevel. De er indbyrdes kongruente, hvormed vi mener, at der til hvert par af trekanter findes en homografi, altså en ikke-Euklidisk flytning, som afbilder den ene på den anden.

Det sorte net er det såkaldt duale net, som består af ikke-Euklidiske linjer, som forbinder midtpunkter i trekanterne. Derved deles hver af trekanterne i tre dele. Alle disse dele vil tilsammen dække hele cirkelskiven, uden andet overlap end fælles kanter. Da alle områderne er indbyrdes kongruente, som defineret ovenfor kalder vi mængden af disse områder for en fliselægning og områderne for fliser. En af disse områder, markeret med  $I$ , vil vi benytte som referenceflise, idet vi for hver eneste flise vil notere os hvilken flytning der skal anvendes for at få den frem som billede af referenceflisen. På tegningen er nogle af fliserne forsynet med en etiket, som netop er navnet på den påkrævede flytning.

Den afbildning, som er benævnt  $S$ , er en sædvanlig drejning på  $120^\circ$  om centrum med invers  $s$ . Den er defineret ved formelen  $z \mapsto az$ , hvor  $a = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ , og er så også en homografi. Afbildningen  $P$  med invers  $p$  er en slags parallelforskydning, som skubber den venstre kant af referenceflisen over i den højre, mens den holdes fast i det uendeligt fjerne punkt  $i$ . Heraf ses hvordan gentagen anvendelse af  $P$  og  $p$  dækker hele den med sort indrammede "polygon" som indeholder  $I$ . Det overlades til læseren at overbevise sig om at alle resterende fliser også kan dækkes.



Figur 3. En fliselægning af cirkelmodellen. Se teksten for en forklaring

*Øvelse 10: Stereografisk projektion er cirkelbevarende*

Den stereografiske projektion af en cirkel på sfæren er en cirkel (i udvidet forstand) i ækvatorplanet.

Vis dette! Tip:

Lad der være givet en egentlig cirkel i ækvatorplanet, lad os sige med centrum i  $(a, b, 0)$  og radius  $r$ . Lad  $P = (x, y, z)$  være et vilkårligt punkt på sfæren for hvilket  $P'$  ligger på den givne cirkel.

Opskriv betingelsen for at  $P'$  ligger på cirklen. Dette giver en ligning af anden grad i  $x, y, z$ . Opskriv også betingelsen for at  $P$  ligger på sfæren. Dette giver også en andengradsligning. Udled af disse to andengradsligninger en førstegradsligning i  $x, y, z$ . Udled heraf at  $P$  ligger i et vist plan og dermed på skæringskurven mellem dette plan og sfæren.

I det tilfælde hvor cirklen er en ret linje kan man se at denne er projektion af den plan som er entydigt bestemt ved at indeholde linje og nordpolen.

---

*Eksempel 11: Drejning  $90^\circ$  om  $Z$ -aksen*

Det kan nemt uden brug af formelen ses at en drejning på  $90$  grader om hovedaksen svarer til homografien  $h(z) = iz$ . Benyttes for eksemplets skyld formelen fås

at den har fixpunktet  $(w, h) = (0, 1)$  og vi får da

$$\begin{aligned}\alpha &= \cos \frac{\varphi}{2} + ih \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = (1 + i)\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \beta &= i \cdot 0 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = 0 \\ A &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}}(1 + i) & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}}(1 - i) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ved multiplikation med  $\sqrt{\frac{1}{2}}(1 + i)$  fås matricen

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

som også giver homografien  $h(z) = iz$ .

---

*Eksempel 12: Drejning  $90^\circ$  om  $X$ -aksen*

En drejning på  $90$  grader om  $x$ -aksen har fixpunktet  $(w, h) = (1, 0)$  og vi får da ved brug af formelen

$$\begin{aligned}\alpha &= \cos \frac{\varphi}{2} + ih \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\pi}{4} + i0 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \beta &= iw \sin \frac{\varphi}{2} = i \cdot \sin \frac{\pi}{4} = i\sqrt{\frac{1}{2}} \\ A &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & i\sqrt{\frac{1}{2}} \\ i\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ved multiplikation med  $\sqrt{2}$  fås matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$



altså homografien

$$h(z) = \frac{z+i}{iz+1}.$$

Som check bemærker vi at 1 og  $-1$  er fixpunkter for  $h$ . De stammer ved stereografisk projektion fra  $(1, 0, 0)$  og  $(-1, 0, 0)$ , netop de to fixpunkter for drejningen. Desuden vil  $(0, 1, 0)$  ved drejningen gå over i  $(0, 0, 1)$ . Disse punkter projiceres i  $i$  og  $\infty$ . Dette stemmer med at  $h(i) = \infty$

---

*Eksempel 13: Drejning  $90^\circ$  om  $Y$ -aksen*

En drejning på  $90$  grader om  $y$ -aksen har fixpunktet  $(w, h) = (i, 0)$  og vi får da

$$\alpha = \cos \frac{\varphi}{2} + ih \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot 0 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = iw \sin \frac{\varphi}{2} = i \cdot i \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Ved multiplikation med  $\sqrt{2}$  fås matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Den tilsvarende homografi er

$$h(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Vi har at  $(1, 0, 0)$  drejes i  $-(0, 0, 1)$ , hvilket er i overensstemmelse med at  $h(1) = 0$ .

---

*Eksempel 14: Drejning  $120^\circ$*

En drejning på  $120$  om akse gennem  $(1, 1, 1)$  har fixpunktet

$(w, h) = (\sqrt{\frac{1}{3}}(1+i), \sqrt{\frac{1}{3}})$  og vi får da

$$\alpha = \cos \frac{\varphi}{2} + ih \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sqrt{\frac{1}{3}} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(1+i)$$

$$\beta = iw \sin \frac{\varphi}{2} = i \sqrt{\frac{1}{3}}(1+i) \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}(-1+i)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(-1+i) \\ \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) \end{pmatrix}$$

Ved multiplikation med 2 fås matricen

$$\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}.$$

---

*Øvelse 15: Homografiækvivalens er proportionalitet*

Vis at to matricer som er homografiækvivalente er proportionale. Benyt bemærkningen efter S13

---

*Øvelse 16: Algebraen stemmer*

Vis ved matrixalgebra at drejningen i E12 efterfulgt af drejningen i E13 giver drejningen i E14

---

*Eksempel 17: Bestem drejning ved algebra*

Bestem ved matrixalgebra den drejning som fremkommer, når drejningen i E13 efterfølges af drejningen i E12.

Ved multiplikation af de to matricer for homografierne og efterfølgende normering (så determinanten bliver 1) fås matricen

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & -1+i \\ 1+i & 1+i \end{pmatrix} \quad \text{med homografien } \frac{(1-i)z + (-1+i)}{(1+i)z + (1+i)}.$$

---

*Eksempel 18: Spejling i ækvator svarer til inversion i enhedscirklen*

Dette resultat kan også afledes af foregående sætning

---

*Eksempel 19: Udvidelse af velkendt gruppe*

Lad  $F$  være gruppen frembragt af  $z \mapsto 1-z, z \mapsto 1/z, z \mapsto \bar{z}$ . Da vil  $F$  have 12 elementer og et fundamentalområde udgøres da af den øvre halvdel af fundamentalområdet for gruppen frembragt af  $1-z, z$  alene.

Dette er generelt: enhver gruppe af homografier fordobles ved tilføjelse af  $\bar{z}$ , hvorved et fundamentalområde kan "halveres".

---

## 6: Stikordsregister

---

ikke-Euklidisk

definition, 16

motivation, 15

bevarelse

dobbeltforhold, 12

Caspar Wessel, 6

cirkel

dobbeltforhold, 7

udvidet forstand, 9

cirkelbevarelse, 14

stereografisk, 22

dobbeltforhold

bevarelse, 12

cirkel, 7

definition, 7, 11

homografier, 12

linje, 8

Euklid, 15

Felix Klein, 17

Gauss, 6

Halvkompleks, 25

historie

ikke-Euklidisk geometri, 17

komplekse tal, 6

homografi

cirkelbevarelse, 14

homografier

definition, 10

dobbeltforhold, 12

matrix for, 10

motivation, 9

regning med, 14

kojureret

stereografisk, 26

Poincaré, 17

Riemann-kuglen, 25

stereografisk

cirkelbevarelse, 22

U-matrix, 29

udvidet kompleks plan

definition, 11